

Analiza możliwości rozszerzenia metody trzech rzędnych i zastosowania do elementów nieliniowych z histerezą

Streszczenie. Metoda trzech rzędnych jest metodą grafoanalityczną, na podstawie której można przeprowadzić aproksymację prądu płynącego przez element nieliniowy, przy wymuszeniu sinusoidalnym. Ograniczenia tej metody polegają na tym, że aproksymacja taka składa się ze składowej stałej i dwóch harmonicznych. Wynika to stąd, że na podstawie trzech danych można napisać układ trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi. Aby zwiększyć liczbę harmonicznych należy zwiększyć liczbę punktów pomiarowych. W pracy przedstawiono analizę możliwości zwiększenia liczby tych punktów, uzyskując metodę pięciu rzędnych, a dalej n rzędnych.

Abstract. The method of three ordinates is a graphoanalytical method, on the basis of which it is possible to carry out an approximation of the current flowing through a nonlinear component, with sinusoidal forcing. The limitations of this method are that such an approximation consists of a constant component and two harmonics. This is due to the fact that on the basis of three data, a system of three independent equations with three unknowns can be written. To increase the number of harmonics, the number of measurement points must be increased. The paper presents an analysis of the possibility of increasing the number of these points, obtaining the method of five ordinates and further n ordinates. (**Analysis of the possibility of extending the method of three ordinates and applying to nonlinear elements with hysteresis**).

Słowa kluczowe: metoda rzędnych, równania nieliniowe, histereza, harmoniczne.

Keywords: method of ordinates, nonlinear equations, hysteresis, harmonics.

Wstęp

Analiza rzeczywistych problemów technicznych sprowadza się do opisu matematycznego, który w ogólnym przypadku ma charakter nieliniowy. O ile układy liniowe są już stosunkowo dokładnie poznane [1, 5], to układy nieliniowe stanowią przedmiot dalszych badań. Klasa układów nieliniowych jest znacznie szersza niż układów liniowych. Ich zasadniczą cechą jest to, iż nie spełniają zasady superpozycji. Postulat liniowości jest niezwykle ostrym warunkiem, ponieważ liniowe modele matematyczne nie opisują rzeczywistych obiektów fizycznych. Najczęściej stosowanymi metodami analizy układów nieliniowych są metody graficzne [1, 4], analityczne [2, 6, 7, 10] oraz metody numeryczne [3, 8, 9].

Zakres zastosowań graficznych metod analizy układów nieliniowych odnosi się przede wszystkim do badań jakościowych i badań prostych obwodów w przypadku nieskomplikowanych postaci działających na nie wymuszeń. Uzupełnienie tych metod o podejście analityczne pozwala na rozszerzenia ich użyteczności na większą klasę układów.

Przedmiotem niniejszej pracy jest przedstawienie metody grafoanalitycznej analizy obwodów nieliniowych przy wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym. Przedstawione zostaną kolejno metody: analizy trzech rzędnych, rozszerzenie jej na pięć rzędnych, a następnie rozwinięcie na dowolną liczbę rzędnych.

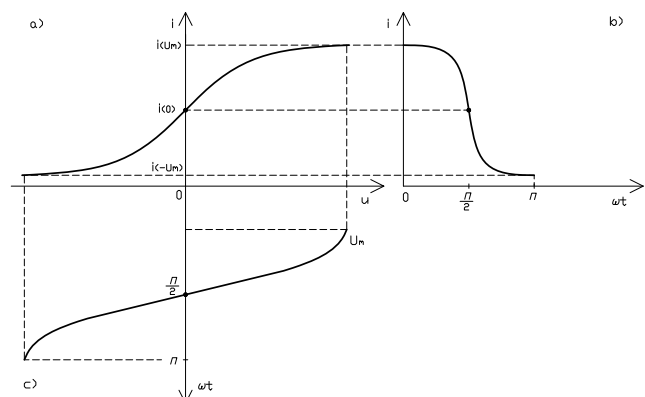
Metoda graficzno-analityczna trzech rzędnych

Zastosowanie metody zostanie zaprezentowane na przykładzie elementu nieliniowego, którego charakterystyka prądowo-napięciowa pokazana na rysunku 1a) przedstawia krzywą pierwotną magnesowania materiału ferromagnetycznego.

W celu przeprowadzenia analizy przyjęto następujące założenia:

- funkcja wymuszająca (sygnał sinusoidalny) przybiera następującą wartość maksymalną i minimalną $(k + \frac{1}{2})\pi \leq \omega t \leq (k + \frac{3}{2})\pi$, dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots$;

- przy wyznaczaniu kolejnych rzędnych prądu stosowana jest nieparzysta liczba argumentów.



Rys. 1. a) charakterystyka $i = f(u)$ elementu nieliniowego; b) krzywa prądu $i = f(t)$; c) wymuszenie

Rysunek 1c) pokazuje sygnał wymuszający podany element nieliniowy. Jest nim napięcie kosinusoidalne: $u = |U_m| \cos \omega t$ pokazane w przedziale:

$$k\pi \leq \omega t \leq (k + 1)\pi.$$

Rozwiązaniem jest wykreślona krzywa prądu w funkcji czasu $i = f(t)$ pokazana na rysunku 1b).

Krzywa ta jest funkcją parzystą, stąd też możemy zapisać ją, ograniczając się do trzech składników szeregu Fouriera, następująco:

$$(1) \quad i(t) = |I_0| + |I_{1m}| \cos(\omega t) + |I_{2m}| \cos(2\omega t)$$

Amplitudy prądu poszczególnych harmonicznych wyznaczamy z wyrażen na wartości trzech rzędnych charakterystyki odpowiadających trzem fazom doprowadzonego napięcia (rys. 1a)

$$(2) \quad \omega t = \left(0; \frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

dla których napięcie $u(\omega t)$ przyjmuje odpowiednio wartości: $u(0) = |U_m|$; $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $u(\pi) = -|U_m|$

Z charakterystyki odczytujemy konkretne wartości prądu dla poszczególnych napięć: $i(|U_m|)$; $i(0)$; $i(-|U_m|)$

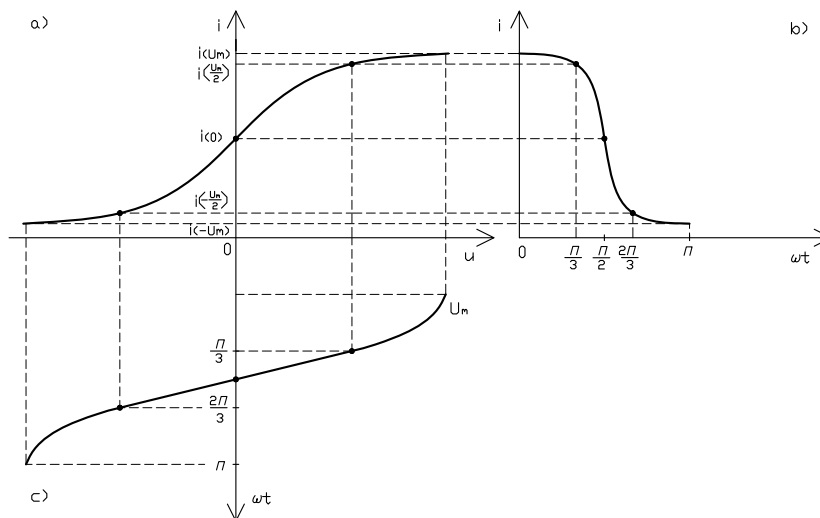
Podstawiając jedną za drugą wartość z wyrażenia (2) do (1), otrzymujemy trzy równania:

$$\begin{aligned} (3) \quad & i(|U_m|) = |I_0| + |I_{1m}| + |I_{2m}| \\ (4) \quad & i(0) = |I_0| - |I_{2m}| \\ (5) \quad & i(-|U_m|) = |I_0| - |I_{1m}| + |I_{2m}| \end{aligned}$$

z których wyznaczamy poszczególne niewiadome:

$$\begin{aligned} (6) \quad & |I_0| = \frac{1}{2}i(0) + \frac{1}{4}[i(|U_m|) + i(-|U_m|)] \\ (7) \quad & |I_{1m}| = \frac{1}{2}[i(|U_m|) - i(-|U_m|)] \\ (8) \quad & |I_{2m}| = -\frac{1}{2}i(0) + \frac{1}{4}[i(|U_m|) + i(-|U_m|)] \end{aligned}$$

W przypadku, gdy dokładność aproksymacji metodą trzech rzędnych jest niewystarczająca i zachodzi konieczność wyznaczenia amplitud harmonicznich wyższego rzędu, układamy większą liczbę równań.



Rys. 2. a) charakterystyka $i = f(u)$ elementu nieliniowego; b) krzywa prądu $i = f(t)$; c) wymuszenie.

Otrzymujemy układ pięciu równań z czterema niewiadomymi. Wiedząc, że każde z ułożonych tożsamości nie powtarza się, rozwiązanie układu równań jest sprzeczne. Z tego też powodu, należy przyjmować, jako funkcję aproksymującą, szereg Fouriera z taką samą liczbą składników, co liczba argumentów:

$$(10) \quad i(t) = |I_0| + |I_{1m}| \cos(\omega t) + |I_{2m}| \cos(2\omega t) + |I_{3m}| \cos(3\omega t) + |I_{4m}| \cos(4\omega t)$$

Po podstawieniu argumentów i odczytaniu poszczególnych wartości prądu z charakterystyki (rys. 2a), otrzymujemy układ równań z pięcioma niewiadomymi:

$$\begin{aligned} (11) \quad & i(|U_m|) = |I_0| + |I_{1m}| + |I_{2m}| + |I_{3m}| + |I_{4m}| \\ (12) \quad & i\left(\frac{|U_m|}{2}\right) = |I_0| + \frac{|I_{1m}|}{2} - \frac{|I_{2m}|}{2} - |I_{3m}| - \frac{|I_{4m}|}{2} \\ (13) \quad & i(0) = |I_0| - |I_{2m}| + |I_{4m}| \\ (14) \quad & i\left(-\frac{|U_m|}{2}\right) = |I_0| - \frac{|I_{1m}|}{2} - \frac{|I_{2m}|}{2} + |I_{3m}| - \frac{|I_{4m}|}{2} \\ (15) \quad & i(-|U_m|) = |I_0| - |I_{1m}| + |I_{2m}| - |I_{3m}| + |I_{4m}| \end{aligned}$$

Chcąc teraz wyznaczyć poszczególne amplitudy kolejnych harmonicznich, korzystając z twierdzenia Cramera budujemy następującą macierz współczynników \mathbf{W} [12]:

$$(16) \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozszerzenie metody graficzno-analitycznej na pięć rzędnych

Chcąc zwiększyć dokładność wyznaczenia zależność $i = f(t)$ na drodze analitycznej, należy dodać kolejne składniki szeregu Fouriera. I tak dodając następny składnik do równości (1) otrzymujemy funkcję aproksymującą krzywą prądu, w postaci [11]:

$$(9) \quad i(t) = |I_0| + |I_{1m}| \cos(\omega t) + |I_{2m}| \cos(2\omega t) + |I_{3m}| \cos(3\omega t)$$

Z uwagi na przyjęte założenia dotyczące metody postępowania przy wyznaczaniu kolejnych składowych harmonicznich, poszczególne argumenty, dla których będą odczytywane wartości prądu z charakterystyki elementu (rys. 2a), są następujące: $\omega t = \left(0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \pi\right)$.

Obliczając wyznacznik macierzy \mathbf{W} należy sprawdzić czy $\det \mathbf{W} \neq 0$. Jeżeli tak to tworzymy następnie wyznaczniki $\det \mathbf{W}_0$, $\det \mathbf{W}_1$, $\det \mathbf{W}_2$, $\det \mathbf{W}_3$ i wyznaczamy poszczególne niewiadome według wzorów:

$$(17) \quad |I_0| = \frac{\det \mathbf{W}_0}{\det \mathbf{W}}; \quad |I_1| = \frac{\det \mathbf{W}_1}{\det \mathbf{W}}; \quad |I_2| = \frac{\det \mathbf{W}_2}{\det \mathbf{W}}; \\ |I_3| = \frac{\det \mathbf{W}_3}{\det \mathbf{W}}; \quad |I_4| = \frac{\det \mathbf{W}_4}{\det \mathbf{W}}$$

Wyznacznik macierzy \mathbf{W} i pozostałe wynoszą odpowiednio:

$$\det \mathbf{W} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\det \mathbf{W}_0 = 6 \left[i\left(\frac{|U_m|}{2}\right) + i\left(-\frac{|U_m|}{2}\right) \right] + 3[i(|U_m|) + i(-|U_m|)],$$

$$\det \mathbf{W}_1 = 6 \left[i(|U_m|) + i\left(\frac{|U_m|}{2}\right) - i\left(-\frac{|U_m|}{2}\right) - i(-|U_m|) \right];$$

$$\det \mathbf{W}_2 = \frac{9}{2} [i(|U_m|) + i(-|U_m|)] - 9i(0);$$

$$\det \mathbf{W}_3 = 6 \left[i\left(-\frac{|U_m|}{2}\right) - i\left(\frac{|U_m|}{2}\right) \right] + 3[i(|U_m|) - i(-|U_m|)];$$

$$\det \mathbf{W}_4 = 12i(0) - 9 \left[i\left(\frac{|U_m|}{2}\right) + i\left(-\frac{|U_m|}{2}\right) \right] + \frac{3}{2} [i(|U_m|) + i(-|U_m|)]$$

Stąd otrzymujemy:

$$(18) |I_0| = \frac{1}{3} \left[i \left(\frac{|U_m|}{2} \right) + i \left(-\frac{|U_m|}{2} \right) \right] + \frac{1}{6} [i(|U_m|) + i(-|U_m|)]$$

$$(19) |I_{1m}| = \frac{1}{3} \left[i(|U_m|) + i \left(\frac{|U_m|}{2} \right) - i \left(-\frac{|U_m|}{2} \right) - i(-|U_m|) \right]$$

$$(20) |I_{2m}| = -\frac{1}{2} i(0) + \frac{1}{4} [i(|U_m|) + i(-|U_m|)]$$

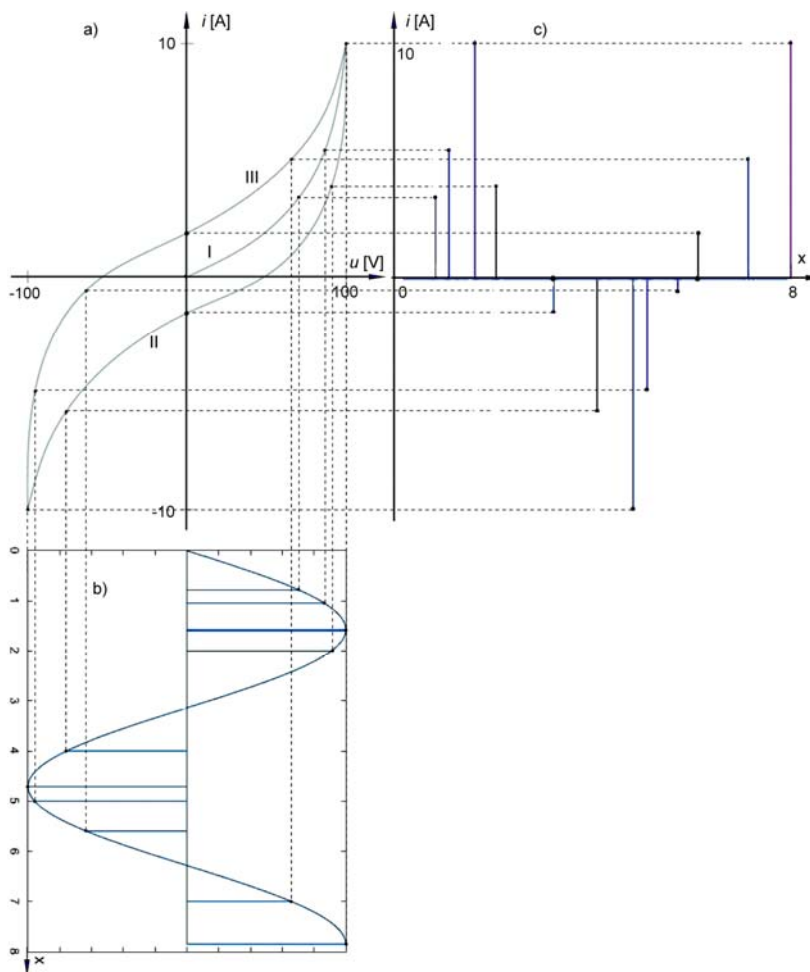
$$(21) |I_{3m}| = \frac{1}{3} \left[i \left(-\frac{|U_m|}{2} \right) - i \left(\frac{|U_m|}{2} \right) \right] + \frac{1}{6} [i(|U_m|) - i(-|U_m|)]$$

$$(22) |I_{4m}| = \frac{2}{3} i(0) - \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{|U_m|}{2} \right) + i \left(-\frac{|U_m|}{2} \right) \right] + \frac{1}{12} [i(|U_m|) + i(-|U_m|)]$$

Zastępując sygnał wymuszający sinusoidalnym $u = |U_m| \sin \omega t$, sprawdzimy czy istnieje możliwość opisu krzywej prądu funkcją aproksymującą ograniczoną do tej samej liczby składowych.

Wymuszenie jest funkcją nieparzystą, stąd też funkcja odpowiedzi również będzie nieparzysta. Przedstawiając odpowiedź sygnału w postaci szeregu Fouriera należy dopisać piątą składową ze względu na brak składowej stałej.

$$(23) i(t) = |I_{1m}| \sin(\omega t) + |I_{2m}| \sin(2\omega t) + |I_{3m}| \sin(3\omega t) + |I_{4m}| \sin(4\omega t) + |I_{5m}| \sin(5\omega t)$$



Rys.3. Wyznaczenia prądu płynącego przez element nieliniowy z histerezą:

- a) charakterystyka elementu,
- b) wymuszenia sinusoidalne,
- c) wyznaczone punkty przebiegu prądu.

Analiza możliwości rozszerzenia metody na dowolną liczbę rzędnych

Analizując przykłady z poprzednich dwóch rozdziałów, wyprowadzona zostanie ogólna postać metody postępowania, umożliwiająca wyznaczenie poszczególnych współczynników składowych harmonicznych funkcji, aproksymującej krzywą prądu.

W celu rozszerzenia metody rzędnych do postaci ogólnej, przyjmijmy jako sygnał wymuszający postać kosinusoidalną funkcji aproksymującej daną charakterystykę.

Aby otrzymać poszczególne wartości niewiadomych współczynników przy kolejnych składowych szeregu

Fouriera, należy przyjmować do analitycznego opisu charakterystyki, nieparzystą liczbę argumentów.

Ogólny zapis funkcji periodycznej o okresie 2π , aproksymującej daną krzywą, ma postać

$$(24) i(t) = |I_0| + |I_{1m}| \cos(\omega t) + |I_{2m}| \cos(2\omega t) + |I_{3m}| \cos(3\omega t) + |I_{4m}| \cos(4\omega t) + \dots$$

gdzie: $\omega t \in (0, \pi)$, $\omega t = (\omega t_1, \omega t_2, \omega t_3, \dots, \omega t_n) n \in \mathbb{Z}_+$

Układ równań dla poszczególnych argumentów przedstawia się następująco:

$$P_3 = [-10 \quad -0.6235 \quad 1.8275 \quad 7.8475 \quad 10].$$

Następnie na podstawie układu równań:

$$(32) \quad A_3 \mathbf{I}h_3 = P_3$$

gdzie:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) & \sin\left(3 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) & \sin\left(5 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \sin(5.6) & \sin(2 \cdot 5.6) & \sin(3 \cdot 5.6) & \sin(5 \cdot 5.6) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin(7.5) & \sin(2 \cdot 7.5) & \sin(3 \cdot 7.5) & \sin(5 \cdot 7.5) \\ 1 & \sin(7.85) & \sin(2 \cdot 7.85) & \sin(3 \cdot 7.85) & \sin(5 \cdot 7.85) \end{bmatrix},$$

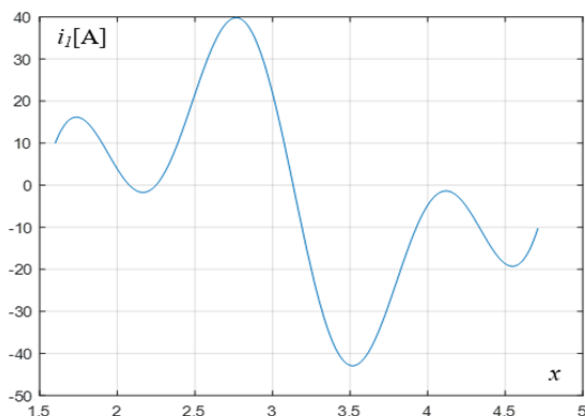
$$\mathbf{I}h_3 = \begin{bmatrix} I_{30} \\ I_{31m} \\ I_{32m} \\ I_{33m} \\ I_{35m} \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -0.6235 \\ 1.8275 \\ 7.8475 \\ 10 \end{bmatrix}$$

wyznaczono amplitudy harmonicznych dla przedziału 3.

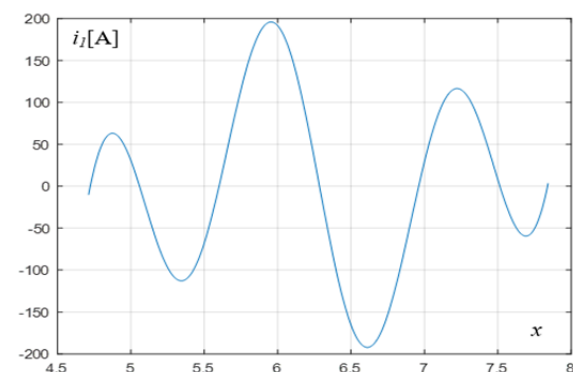
$$i_2 = 1.8275 + 384.8105 \sin(\omega t) - 464.9479 \sin(2\omega t) + 184.4713 \sin(3\omega t) - 188.5117 \sin(5\omega t)$$

Rys.6. przedstawia przebieg prądu w przedziale odpowiadającym gałęzi III, charakterystyki rozpatrywanego elementu.

Należy zauważyć, że początki i końce przebiegów w każdym przedziale odpowiadają wspólnym punktom gałęzi charakterystyki rozpatrywanego elementu nieliniowego.



Rys. 5. Wykres prądu odpowiadający gałęzi II elementu nieliniowego



Rys. 6. Wykres prądu odpowiadający gałęzi III elementu nieliniowego

Wnioski

W niniejszej pracy wykazano, że metodę trzech rzędnych można rozszerzać w zasadzie na dowolną liczbę rzędnych a tym samym zakładać odpowiadającą im liczbę harmonicznych. Należy jednak pamiętać, aby wybierać takie argumenty, dla których wyznacznik macierzy w uzyskanym układzie równań był różny od zera i miał możliwie największą wartość, co świadczy o dobrym uwarunkowaniu równań tzn. że drobne różnice w pomiarach nie powodują dużych zmian w rozwiązaniu. Wykazano również, że metody te można z powodzeniem stosować do elementów nieliniowych z histerezą.

Autorzy:

dr hab. inż. Maciej Włodarczyk prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, E-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl

dr hab. inż. Andrzej Zawadzki prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl
dr hab. inż. Sebastian Różowicz prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl

LITERATURA

- [1] Bolkowski St.: Teoria obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1995
- [2] Banks S.P., „Mathematical theories of nonlinear systems” Prentice Hall International (UK) Ltd, 1988.
- [3] Chua O.L., Pen-Min Lin: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981
- [4] Cunningham W.J.: Analiza układów nieliniowych. WNT, Warszawa 1962
- [5] Kudrewicz J.: Nieliniowe obwody elektryczne. WNT, Warszawa 1996
- [6] Nijmeijer H., van der Schaft A.J., „Nonlinear Dynamical Control Systems”, Springer-Verlag, New York 1991.
- [7] Zawadzki A., Różowicz S. Application of input - state of the system transformation for linearization of some nonlinear generators. International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 13/2015 No.3, pp. 626-633. DOI: 10.1007/s12555-014-0026-3
- [8] Himmelblau D.M., „Applied Nonlinear Programming”, The Univ. Of Texas, McGraw-Hill Book Company 1981.
- [9] D.M. Himmelblau . Some practical experiences in applying nonlinear programming to CAD. Elsevier. Volume 13, Issue 6, November 1981, doi.org/10.1016/0010-4485(81)90207-4
- [10] Zawadzki A. Application of local coordinates rectification in linearization of selected parameters of dynamic nonlinear systems. COMPEL - T x International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. Vol. 33 No. 5, pp.: 1819-1830, 2014. ISSN: 0332-1649. DOI 10.1108/COMPEL-11-2013-0358.
- [11] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna, tom I, PWN, Warszawa 1995,
- [12] Szybalski T. Rozszerzenie grafoanalitycznej metody trzech rzędnych. Praca dyplomowa. Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2011.