

Rotacja z pochodnymi niecałkowitego rzędu i niektóre jej własności

Streszczenie. W pracy przedstawiono operator rotacji w ujęciu pochodnych niecałkowitego rzędu. Podjęto próbę wyznaczenia rotacji niecałkowitego rzędu, dla pól wektorowych oraz znalezienia jej interpretacji na gruncie mechaniki i teorii pól magnetycznych (na przykładzie obliczania natężenia pola magnetycznego powstałego od przewodnika wiodącego prąd elektryczny).

Abstract. The paper presents the rotation operator in terms of fractional order derivatives. An attempt is made to determine the rotation of a fractional order, for vector fields, and to find its interpretation on the ground of mechanics and magnetic field theory (using the example of calculating the magnetic field strength arising from a conductor leading an electric current). (**Rotation with fractional order derivatives and some of its properties**)

Słowa kluczowe: pola wektorowe, rotacja, pochodna niecałkowitego rzędu, rotacja niecałkowitego rzędu.

Keywords: vector fields, rotation, fractional order derivative, fractional order rotation.

Wstęp

Do analizy fizycznych pól wektorowych często stosowany jest operator różniczkowy zwany rotacją, który jest wielkością wektorową, będącą produktem iloczynu wektorowego operatora Nabla i wektora opisującego fizyczne pole np. natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} . Przy pomocy rotacji można opisać wirowość pola wektorowego, czyli regularną zmianę jego kierunku od punktu do punktu. Każda z pochodnych wchodzących w skład rotacji oznacza lokalną zmienność danej składowej przy przemieszczaniu się prostopadłe do niej. Operator ten, jak wiadomo jednemu polu wektorowemu przyporządkowuje inne pole wektorowe i pozwala na rozróżnienie pól wirowych i bezwirowych. Znalazł więc zastosowanie w teorii pól elektromagnetycznych a szczególnie w analizie pól magnetycznych [1, 2, 3]. Pole wynikowe ma kierunek prostopadły do danego pola w danym punkcie (przykład: wektor gęstości prądu i wektor natężenia pola magnetycznego).

Klasyczna pochodna jest korzystna do modelowania fizycznego systemów lokalnie, natomiast zastosowanie do obliczeń rachunku niecałkowitego rzędu pozwala bardziej globalnie modelować systemy fizyczne [4, 5, 6].

W niniejszej pracy podjęto próbę wyznaczenia rotacji niecałkowitego rzędu, dla pól wektorowych oraz znalezienia jej interpretacji na gruncie mechaniki i teorii pól magnetycznych (na przykładzie obliczania natężenia pola magnetycznego powstałego od przewodnika wiodącego prąd elektryczny).

Jak wiadomo klasyczną rotację [7] w układzie współrzędnych prostokątnych można zapisać związkami (1):

$$(1) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

Rotację niecałkowitego rzędu oznaczoną tu przez „ rot^α ” uzyskano zastępując w (1) pochodne pierwszego rzędu pochodnymi niecałkowitego rzędu α ($0 < \alpha < 1$):

$$(2) \quad \text{rot}^\alpha \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

przy czym, do prowadzonej analizy zastosowano definicję pochodnej niecałkowitego rzędu wg Caputo (3) [4,5]:

$$(3) \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \quad \text{gdzie } n-1 \leq \alpha \leq n$$

gdzie: Γ funkcja gamma.

Definicja ta jest często używana w zastosowaniu do układów fizycznych ponieważ warunki początkowe wyrażone są pochodnymi klasycznymi, które mają interpretację fizyczną.

Interpretacja mechaniczna

Jeżeli w ujęciu klasycznym obliczy się rotację pola prędkości dowolnego punktu ciała sztywnego wirującego z prędkością kątową ω , to w wyniku otrzyma się podwójną wartość prędkości kątowej ω [8].

I tak w układzie kartezjańskim prędkość liniową punktu można wyrazić wzorem: $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$,

gdzie: $\omega = \omega \mathbf{1}_z$, $\mathbf{r} = x \mathbf{1}_x + y \mathbf{1}_y + z \mathbf{1}_z$

$$(4) \quad \mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{1}_x(-y\omega) + \mathbf{1}_y(x\omega)$$

Zatem:

$$(5) \quad \text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{1}_z \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega) - \frac{\partial}{\partial y}(-y\omega) \right] = \mathbf{1}_z[\omega + \omega] = \mathbf{1}_z 2\omega$$

Obliczając rotację ułamkowego rzędu otrzymuje się:

$$(6) \quad \text{rot}^\alpha \mathbf{V} = \mathbf{1}_z \omega \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} x + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} y \right) = \mathbf{1}_z \frac{\omega}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} [x^{1-\alpha} + y^{1-\alpha}] = \mathbf{1}_z \omega \frac{x^{1-\alpha} + y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

ponieważ dla ($0 < \alpha < 1$):

$$(7) \quad {}_0^C D_y^\alpha (y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\tau)^{-\alpha} d\tau = \frac{y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$

Rotacja ułamkowego rzędu z prędkości liniowej punktu obracającego się ciała zależy od położenia tego punktu, co można interpretować, że ciało to nie jest sztywne i punkty należące do niej są „luźno” związane w zależności od położenia.

Pola bezwirowe

Jak już wspomniano operacja rotacji służy do rozróżnienia pól wirowych: $-\text{rot}A \neq 0$ i bezwirowych: $-\text{rot}A = 0$ gdzie wektor A charakteryzuje badane pole. Następnie zostaną sprawdzone te zależności na podstawie natężenia pola elektrostatycznego E wytworzonego przez nieruchomy ładunek Q , który tworzy pole bezwirowe. We współrzędnych sferycznych natężenie to można wyznaczyć na podstawie wzoru (8):

$$(8) \quad E = \mathbf{1}_r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Obliczając rotację w ujęciu klasycznym we współrzędnych sferycznych otrzymuje się

$$(9) \quad \text{rot}E = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \mathbf{1}_r & \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{1}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{1}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dla wektora A rotacja: rot^α we współrzędnych sferycznych należy uwzględnić współczynniki metryki [9,10], zatem:

$$(10) \quad \text{rot}^\alpha A = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^\alpha g_{22}^\alpha g_{33}^\alpha}} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_u \sqrt{g_{11}^\alpha} & \mathbf{1}_v \sqrt{g_{22}^\alpha} & \mathbf{1}_w \sqrt{g_{33}^\alpha} \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial \theta^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial \varphi^\alpha} \\ \sqrt{g_{11}^\alpha} A_r & \sqrt{g_{22}^\alpha} A_\theta & \sqrt{g_{33}^\alpha} A_\varphi \end{vmatrix}$$

gdzie:

$$(11) \quad \begin{cases} g_{11}^\alpha = ({}^C D_r^\alpha x)^2 + ({}^C D_r^\alpha y)^2 + ({}^C D_r^\alpha z)^2 \\ g_{22}^\alpha = ({}^C D_\theta^\alpha x)^2 + ({}^C D_\theta^\alpha y)^2 + ({}^C D_\theta^\alpha z)^2 \\ g_{33}^\alpha = ({}^C D_\varphi^\alpha x)^2 + ({}^C D_\varphi^\alpha y)^2 + ({}^C D_\varphi^\alpha z)^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Dla wektora E rotację ułamkowego rzędu: rot^α można wyznaczyć na podstawie zależności:

$$(12) \quad \text{rot}^\alpha E = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^\alpha g_{22}^\alpha g_{33}^\alpha}} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_u \sqrt{g_{11}^\alpha} & \mathbf{1}_v \sqrt{g_{22}^\alpha} & \mathbf{1}_w \sqrt{g_{33}^\alpha} \\ \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial \theta^\alpha} & \frac{\partial^\alpha}{\partial \varphi^\alpha} \\ \sqrt{g_{11}^\alpha} E_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Rotacja ta jest równa zero niezależnie od wartości współczynników metryki, ponieważ g_{11}^α i E_r nie zależą od współrzędnej θ . Oznacza to, że rotacja ułamkowa pól bezwirowych podobnie jak rotacja klasyczna jest równa zero.

Pola magnetyczne

Jako przykład zostanie rozpatrzone natężenie pola magnetycznego wewnątrz prostoliniowego kołowego przewodnika o promieniu R , którego oś pokrywa się z osią z , wiodącego równomiernie rozłożony w całym przekroju prąd stały I w kierunku osi z . Jak wiadomo moduł natężenia pola magnetycznego w odległości $r < R$ od osi przewodnika wyraża się wzorem [11,12]

$$(13) \quad H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

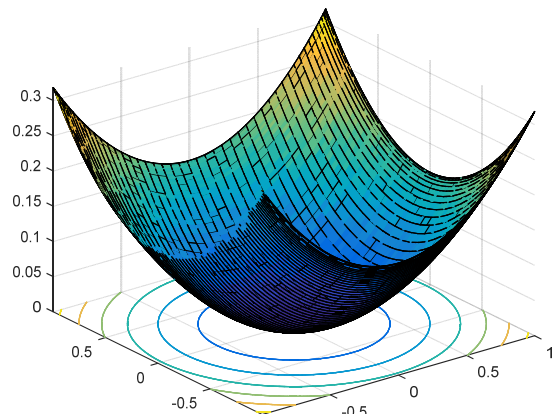
Zapisując jako wektor w układzie kartezjańskim otrzymujemy:

$$(14) \quad \mathbf{H} = -\mathbf{1}_x \frac{Iy}{2\pi R^2} + \mathbf{1}_y \frac{Ix}{2\pi R^2}$$

Obliczając rotację klasyczną wektora H

$$(15) \quad \text{rot} H = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_x & \mathbf{1}_y & \mathbf{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{Iy}{2\pi R^2} & \frac{Ix}{2\pi R^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{1}_z \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Ix}{2\pi R^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{Iy}{2\pi R^2} \right) \right] = \mathbf{1}_z \frac{I}{\pi R^2}$$

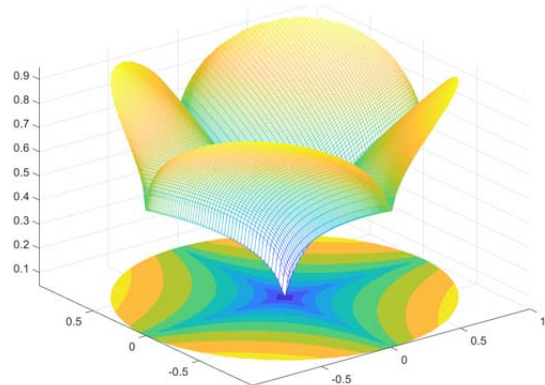
Otrzymuje się oczywiście gęstość prądu w przewodniku (rys.1).



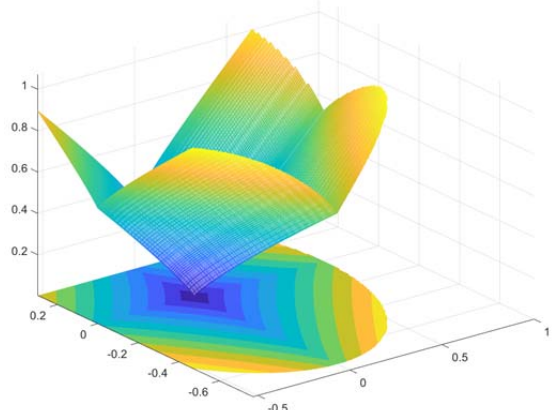
Rys. 1. Gęstość prądu dla $\alpha = 1$ – rotacja klasyczna.

Obliczając rotację ułamkowego rzędu – analogicznie jak we wzorze (6) uwzględniając związek (7), otrzymuje się:

$$(16) \quad \text{rot}^\alpha H = \mathbf{1}_z \frac{I}{2\pi R^2} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} x + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} y \right) = -\mathbf{1}_z \frac{I}{2\pi R^2} \frac{x^{1-\alpha} + y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$$



Rys. 2. Gęstość prądu dla $\alpha = 0,5$.



Rys. 3. Gęstość prądu dla $\alpha = 0,9$.

Porównując wyniki (15) i (16) można stwierdzić, że dla rotacji ułamkowego rzędu gęstość prądu ma ten sam kierunek ale nie jest stała i zależy od położenia punktu. Wyniki przedstawiono na rysunkach 2 i 3.

Pokazana na rys. 2 i 3 gęstość prądu wewnątrz prostoliniowego kołowego przewodnika odpowiadająca rotacjom ułamkowego rzędu (dla: $\alpha = 0,5$ i $\alpha = 0,9$) przy natężeniu pola magnetycznego opisanego wzorem (13). Można zauważyć, że gęstość prądu dla $\alpha = 0,5$ jest większa w okolicach osi przewodnika niż dla $\alpha = 0,9$ co można interpretować jako mniejsze wypieranie prądu.

Wnioski

Rotacja ułamkowego rzędu zachowuje niektóre cechy rotacji klasycznej tzn. dla pól bezwirowych daje wartość zero. Analizując jej interpretację mechaniczną zauważyć można, że nie dotyczy to bryły sztywnej tylko ciała składającego się z luźno powiązanych cząstek. Jeśli chodzi o pole magnetyczne pochodzące od przewodnika z prądem, to rotacja ułamkowego rzędu dotyczy nierównomiernej gęstości prądu, co mogłoby znaleźć zastosowanie przy obliczaniu pola magnetycznego wywołanego przez przewodnik z prądem z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości.

Autorzy:

dr hab. inż. Andrzej Zawadzki prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl
dr hab. inż. Maciej Włodarczyk prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, E-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl
dr hab. inż. Sebastian Różowicz prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Automatyki; Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: s.rozowicz@tu.kielce.pl

LUTERATURA

- [1] Ryszard Sikora. *Elektromagnetyczne metody testowania materii*. Wydanie 3 z Zastosowania Elektromagnetyzmu Instytut Naukowo-Badawczy ZTUREK, 2003. ISBN 8391606562, 9788391606568.
- [2] Piątek Zygmunt Jabłoński Paweł. *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*. PWN Warszawa 2023. ISBN: 9788301193294.
- [3] Frisz S., Timoriewa A., *Fizyka*, t. II, Warszawa, PWN 1965.
- [4] Ostalczyk P. *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2008.
- [5] Zawadzki A. *Zastosowanie pochodnych niecałkowitego rzędu do modelowania stanów przejściowych w obwodach elektrycznych zawierających indukcyjność*. Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), Tom: 89, Zeszyt: 4, str.: 92-94, 2013.
- [6] Włodarczyk M., Zawadzki A. *The application of hypergeometric functions to computing fractional order derivatives of sinusoidal functions*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences, Vol. 64, No. 1, pp. 243-248, 2016. ISSN: 0239-7528. DOI: 10.1515/bpasts-2016-0026.
- [7] Antonina Orlicz-Swiłło. *Wybrane elementy analizy wektorowej, teorii pola, teorii potencjału i ich zastosowania w elektrodynamice*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej. Gdańsk 2017. ISBN 978-83-7348-692-8.
- [8] Cholewicki T. *Elektrotechnika teoretyczna*, tom II, WNT. Warszawa 1972
- [9] Karaśkiewicz E., *Zarys teorii wektorów i tensorów*, Warszawa, PWN 1976.
- [10] Sikora R. *Teoria pola elektromagnetycznego*. WNT, Warszawa 1985
- [11] Baron B. . *Elektrotechnika teoretyczna*, część I. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice 1976
- [12] Kuczyński A. *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*, część I. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej. Łódź 2000