

Zastosowanie warunkowego uśredniania do oceny niepewności średniej arytmetycznej sygnałów losowych

Streszczenie. Brak uwzględnienia występującego powiązania statystycznego danych pomiarowych wpływa na zaniżenie lub zawyżenie wartości obliczanych parametrów statystycznych stosowanych do oceny dokładności pomiaru. W artykule podjęto próbę zastosowania warunkowego uśredniania do oceny niepewności średniej arytmetycznej z uwzględnieniem wpływu powiązania statystycznego danych. Zaletą warunkowej wartości średniej (WWS) jest prosty opis matematyczny oraz łatwość obliczania w praktyce. Warunkowa wartość średnia może mieć zastosowanie w analizie danych pomiarowych oraz w rozpoznawaniu i ocenie powiązania statystycznego próbek sygnału.

Abstract. Failure to take into account the existing statistical relationship of measurement data results in the underestimation or overestimation of the calculated statistical parameters used to assess the accuracy of the measurement. The article attempts to use conditional averaging to assess the uncertainty of the arithmetic mean, taking into account the influence of the statistical relationship of the data. The advantage of the conditional mean value (WWS) is a simple mathematical description and the ease of calculation in practice. The conditional mean value may be used in analyzing measurement data and in recognizing and evaluating the statistical relationship of signal samples. (Application of conditional averaging to assess the uncertainty of the arithmetic mean of random signals).

Słowa kluczowe: sygnał losowy, powiązanie statystyczne danych, warunkowa wartość średnia, funkcja korelacji.

Keywords: random signal, statistical association of data, conditional mean value, correlation function.

Wstęp

We współczesnych pracach badawczych, technicznych, przemysłowych korzysta się z danych próbkowanych z dużą częstotliwością. Między kolejnymi tak uzyskanymi danymi może występować powiązanie statystyczne, które przeważnie określa się skorelowaniem. W publikacjach metrologicznych i statystycznych [1-9] zauważa się potrzebę uwzględnienia statystycznego powiązania danych. Powodem małej ilości wykonywanych analiz uwzględniających wyznaczanie funkcji korelacji i oceny dokładności tej funkcji jest złożoność. Brak uwzględnienia skorelowania powoduje otrzymywanie wyników analiz nawet kilkakrotnie mniejszych lub większych od wyników analiz ze skorelowaniem (w zależności od modelu i znaku skorelowania). Tłumaczony przez Główny Urząd Metrologiczny (GUM) przewodnik [10] nie przedstawia wzorów na obliczenie niepewności danych skorelowanych.

Dlatego poszukuje się nowych rozwiązań w analizie danych eksperymentalnych powiązanych statystycznie. Jednym z kierunków oceny powiązania statystycznego w analizie danych jest obliczanie warunkowej wartości średniej (WWS). Warunkowe uśrednianie jest mało złożone w opisie matematycznym i w zastosowaniu praktycznym. WWS jest przydatna w wyznaczaniu funkcji korelacji dla danych i sygnałów o rozkładzie normalnym i quasinormalnym oraz wyznaczania innych parametrów w przetwarzaniu danych losowych [11-12].

Należy zauważyć, że duża liczba analiz statystycznych sygnałów losowych dotyczy sygnałów przechodzących przez układy wielostopniowego przetwarzania z ograniczonym pasmem częstotliwości, w których następuje normalizacja funkcji gęstości prawdopodobieństwa sygnału.

Warunkowa wartość średnia

Warunkową wartość średnią $E[\]$ dla sygnałów losowych centrowanych o rozkładzie normalnym i quasinormalnym opisuje wzór (1):

$$(1) \quad \mu_{x|x_p}(\tau) = E\left[x(t_p + \tau) \Big|_{x(t_p)=x_p}\right] = k \cdot \rho_x(\tau) \cdot x_p$$

gdzie: k – współczynnik (dla rozkładu normalnego $k = 1$), $x(t_p) = x_p$ – warunek progowy, $x(t_p + \tau)$ – wartości sygnału w chwili odległej o τ od momentu $t = t_p$, $\rho_x(\tau)$ – autokorelacja unormowana.

Wyznaczanie warunkowej wartości średniej arytmetycznej próbkowanych danych wykonuje się za pomocą zmodyfikowanego wzoru (2):

$$(2) \quad \bar{x}_{|x_p}(t_n) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{m=1}^M x_m(t_n) \Big|_{x_m(t_0)=x_p}$$

gdzie: m – numer segmentu sygnału, M – liczba uśrednianych segmentów, n – numer próbki w segmencie.

Wykorzystanie zależności (1) i (2) pozwala na utworzenie charakterystyki WWS będącej odwzorowaniem funkcji autokorelacji (1). Optymalne analizy uśredniania warunkowego dla sygnałów o rozkładach prawdopodobieństwa normalnych i quasinormalnych realizowane są dla warunku progowego x_p mieszczącego się w zakresie od $\sqrt{2} \cdot \sigma_x$ do $2 \cdot \sigma_x$. Wyznaczanie warunkowej wartości średniej znajduje zastosowanie w ocenach powiązania statystycznego danych. [11-16]

Wpływ skorelowania na analizowane parametry statystyczne

W analizach metrologicznych często przyjmuje się, że wartości w szeregu danych są nieskorelowane. W celu przedstawienia opisu matematycznego dla takich danych stosuje się definicje parametrów statystycznych (3) – (5). Pierwszym z obliczanych parametrów jest wartość średnia arytmetyczna (3):

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x(k \cdot \Delta t)$$

gdzie: n – liczba próbek, k – krok uśredniania, Δt – odstęp czasu między próbkami.

Następnie oblicza się odchylenie standardowe danych (4) i względną niepewność średniej arytmetycznej metodą typu A (5):

$$(4) \quad \hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$(5) \quad \frac{\hat{u}_A(\bar{x})}{\hat{\sigma}_x} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ze względu na coraz częstsze stosowanie przetwarzania A/C i dużych częstotliwości próbkowania powinno się uwzględniać wpływ skorelowania sygnałów w większości analiz ich parametrów statystycznych.

Dla opisu sygnałów skorelowanych można wykorzystać wartość średniej arytmetycznej, którą oblicza się klasycznie (3). Natomiast, opis względnej niepewności średniej arytmetycznej uwzględniający skorelowanie danych wyraża zależność (6) [3-5]:

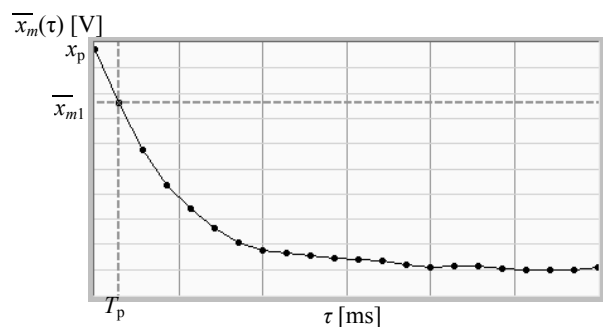
$$(6) \quad \frac{\hat{u}_{Ak}(\bar{x})}{\sigma_x} = \frac{\sqrt{\lambda_m}}{\sqrt{n}}$$

gdzie: $\lambda_m = 1 + \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \cdot \rho_x(k \cdot \Delta t) \right)$ - współczynnik uwzględniający skorelowanie.

Zastosowanie WWS do oceny niepewności średniej arytmetycznej z uwzględnieniem wpływu powiązania statystycznego danych

W celu obliczenia niepewności średniej arytmetycznej $u_A(\bar{x})$ za pomocą warunkowego uśrednienia analizowanych danych o rozkładzie normalnym powiązanych statystycznie, można wykonać następujące działania [12-14]:

- 1) obliczenie wartości średniej $\bar{x}$ (według wzoru (3));
- 2) odjęcie $\bar{x}$ od każdej wartości x_i szeregu danych w celu jego centrowania i otrzymania szeregu x_i^o ;
- 3) wyznaczenie dla szeregu centrowanego x_i^o nieobciążonej estymaty odchylenia standardowego σ_x (według wzoru (4));
- 4) wyznaczenie (dla szeregu centrowanego x_i^o) wartości warunkowej średniej arytmetycznej $\bar{x}_m$, wykorzystując wzór (2). Próg x_p powinno wybierać się z zakresu od $\sqrt{2} \cdot \sigma_x$ do $2 \cdot \sigma_x$.
- 5) Wyznaczanie wartości $\bar{x}_{m1}$ dla okresu próbkowania T_p przedstawiono poglądowo na przykładzie wykładniczej charakterystyki WWS na rysunku 1.
- 6) obliczanie wartości względnej niepewności średniej arytmetycznej za pomocą wzoru (7):



Rys. 1. Przykład wykładniczej charakterystyki WWS.

$$(7) \quad \frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{x_p(n-1) - \bar{x}_{m1}(n+1)}{(n-1) \cdot (x_p + \bar{x}_{m1})}}}$$

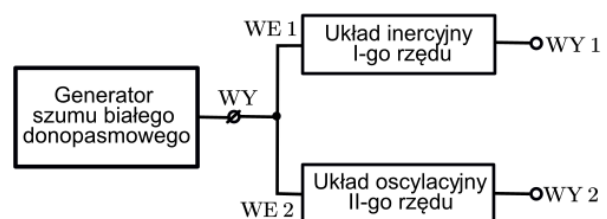
Gdy liczba pomiarów jest duża ($n \gg 1$) to wyrażenie (7) można zredukować i przedstawić w postaci stosunku (8):

$$(8) \quad \frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{x_p - \bar{x}_{m1}}{x_p + \bar{x}_{m1}}}}$$

Układ do przetwarzania sygnału z generatora szumów

Rysunek 2 przedstawia układ eksperymentalny, który składa się z:

- generatora szumu białego dolnopasmowego: RFT NF-RAUSCHGENERATOR NRG 201 TYP 03 002 o rozkładzie $N(0; 0,5)$. Pasma generatora szumu $B = 25\text{kHz}$,
 - układu inercyjnego I-go rzędu, na wyjściu którego powstaje szum skorelowany wykładniczo,
 - układu oscylacyjnego II-go rzędu, na wyjściu którego otrzymuje się szum o korelacji oscylacyjno-wykładniczej.
- Układ zasilany jest napięciem z zasilacza prądu stałego o wartości 12V.



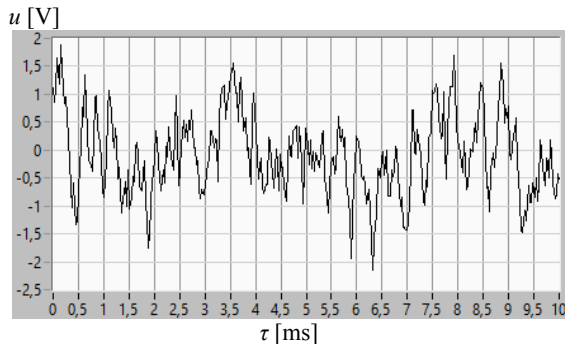
Rys. 2. Schemat blokowy układu eksperymentalnego.

Do analizy sygnałów zastosowano środowisko LabVIEW, w którym wykonano aplikację:

- do komunikacji z kartą pomiarową i akwizycji danych pomiarowych,
- do prezentowania przebiegów sygnałów z otwieranego pliku oraz do obliczania podstawowych statystyk (m.in. wartości średniej, odchylenia standardowego, wariancji),
- do wyznaczania charakterystyk warunkowej wartości średniej oraz funkcji autokorelacji oraz do obliczania wartości niepewności tych charakterystyk.

Badania eksperymentalne sygnału z wykładniczą funkcją WWS

Na rysunku 3 przedstawiono zarejestrowany fragment badanego centrowanego sygnału na wyjściu WY1, który próbkowano z okresem $T_p = 0,0285714$ ms. W obliczeniach statystycznych analizowano $n = 200\,000$ wartości próbek.



Rys. 3. Fragment przebiegu centrowanego sygnału o skorelowaniu wykładniczym.

Wartość średnia $\bar{x}$ badanego sygnału przed centrowaniem wyniosła 0,079796 V i była odejmowana od każdego jego dyskretnych wartości. Ze względu na małą wartość $\bar{x}$ nie przedstawiono przebiegu przed centrowaniem.

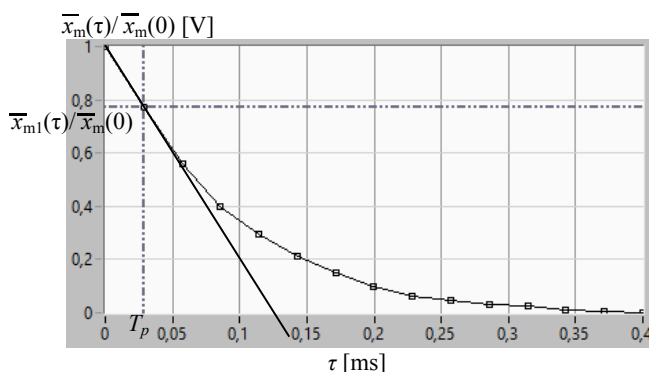
Następnie, obliczono wartość eksperymentalną nieobciążonego odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_x$ sygnału centrowanego, która równała się 0,6506927 V.

Przy skorelowaniu wykładniczym warunkową wartość średnią opisuje wzór (9):

$$(9) \quad \bar{x}|_{x_p}(\tau) = x_p \cdot \rho_x(\tau) = x_p \cdot e^{-\alpha|\tau|}$$

Wyznaczanie i analizę autokorelacji przeprowadzono dla sygnału składającego się z $n = 200\,000$ próbek. Okres próbkowania analizowanego sygnału wynosi $T_p = 0,0285714$ ms. Interwał korelacji wyniósł $\tau_k = 0,13$ ms, a maksymalny interwał $\tau_{km} = 3 \cdot 0,13$ ms = 0,39 ms.

Wykonano wyznaczanie i badanie warunkowej wartości średniej zarejestrowanego sygnału. Na rysunku 4 przedstawiono unormowaną charakterystykę WWS, na której zaznaczono za pomocą kursorów parametr $\bar{x}_{m1}/\bar{x}_m(0)$ dla okresu próbkowania T_p , który wynosił 0,0285714 ms. Parametr $\bar{x}_{m1}/\bar{x}_m(0)$ tej charakterystyki wynosi 0,7736. Do analizy wykorzystano $m = 2200$ segmentów (fragmentów) sygnału. Każdy segment zawierał $n = 30$ próbek. Próg detekcji x_p wynosił 1,2 V.



Rys. 4. Eksperymentalna unormowana wykładnicza charakterystyka WWS.

Poniżej dla warunków eksperymentu przedstawiono obliczone stosunki wartości niepewności $\hat{u}_A(\bar{x})$ do odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_x$:

- bez uwzględniania powiązania statystycznego (gdy $\lambda_m = 1$):

$$\frac{\hat{u}_A(\bar{x})}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{200000}} = 0,002236 \approx 0,0022$$

- ze współczynnikiem λ_m uwzględniającym skorelowanie według zależności (6):

$$\frac{\hat{u}_{Ak}(\bar{x})}{\sigma_x} = \frac{\sqrt{\lambda_m}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{6,48791}}{\sqrt{200000}} = 0,005696 \approx 0,0057$$

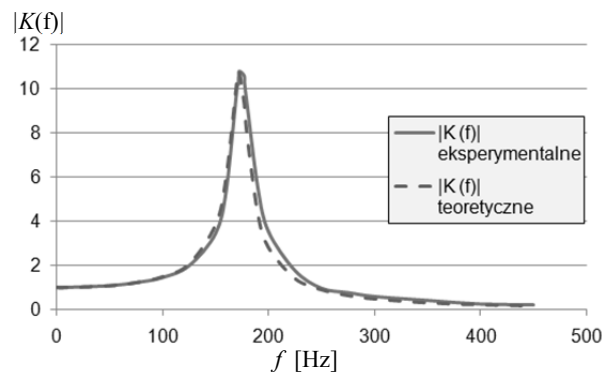
- z uwzględnieniem obliczonej WWS według zależności przybliżonej (8):

$$\frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{(x_p - \bar{x}_{m1})/\bar{x}_m(0)}{(x_p + \bar{x}_{m1})/\bar{x}_m(0)}}} = \frac{1}{\sqrt{200000 \cdot \frac{1-0,7736}{1+0,7736}}} = 0,006259 \approx 0,0063.$$

Współczynnik skorelowania λ_m i wartość punktu warunkowej wartości średniej $\bar{x}_{m1}/\bar{x}_m(0)$ wyznaczono za pomocą programu LabVIEW.

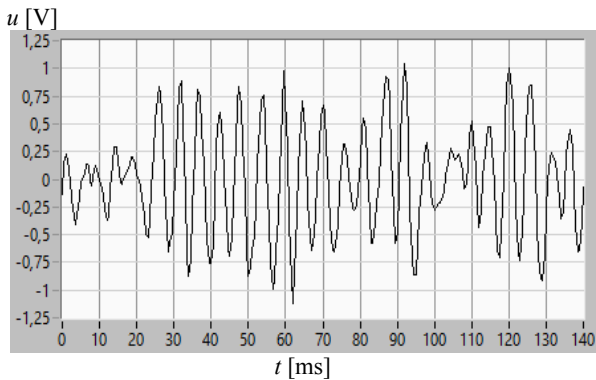
Badania eksperymentalne sygnału z oscylacyjno-wykładniczą funkcją WWS

Na rysunku 5 przedstawiono charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową układu oscylacyjnego II-go rzędu, z małą wartością stopnia tłumienia ζ , ograniczającego pasmo szumu podanego z generatora. Parametry charakterystyki teoretycznej: współczynnik tłumienia $\zeta = 0,0437$, częstotliwość rezonansowa $f_r = 172,5$ Hz.



Rys. 5. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa układu oscylacyjnego II-go rzędu.

Rysunek 6 przedstawia fragment analizowanego centrowanego sygnału na wyjściu WY2, który próbkowano z okresem $T_p = 0,5$ ms. Analizowanych było $n = 500\,000$ próbek. Wartość nieobciążonego odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_x$ badanego sygnału wynosi 0,6575961 V.



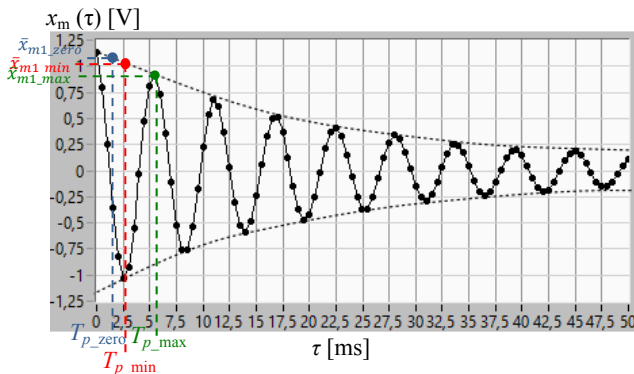
Rys. 6. Fragment przebiegu centrowanego sygnału o skorelowaniu oscylacyjno-wykładniczym.

Przy skorelowaniu oscylacyjno-wykładniczym warunkową wartość średnią opisuje wzór (10):

$$(10) \quad \bar{x}|_{x_p}(\tau) = x_p \cdot \rho_x(\tau) = x_p \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\omega_o \tau)$$

Podczas wyznaczania i analizy warunkowej wartości średniej wykorzystano sygnał składający się z $n = 500\,000$ próbek. Do badania WWS zostało użytych $m=500$ fragmentów sygnału. Każdy segment m składał się z $n = 300$ próbek. Wybrano próg detekcji $x_p=1,2V$.

Rysunek 7 prezentuje charakterystykę warunkowej wartości średniej.



Rys. 7. Eksperymentalna oscylacyjno-wykładnicza charakterystyka WWS.

Dla warunku $T_p \cdot \alpha \cdot n \gg 1$ do obliczenia względnej wartości niepewności z uwzględnieniem WWS można wykorzystać zależność uproszczoną (11) [17]:

$$(11) \quad \frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} \approx \sqrt{\frac{1 - \varphi^2}{n \cdot (1 + \varphi^2 - 2\varphi \cos \omega_o T_p)}}$$

gdzie:

$$\varphi = e^{-\alpha \cdot T_p} = \frac{\bar{x}_{m1}}{x_p}; \quad \omega_o - \text{pulsacja rezonansowa}; \quad \alpha - \text{kąt}$$

nachylenia stycznej do obwiedni o kształcie wykładniczym; T_p – okres próbkowania.

Można wykonać obliczenia maksymalnej i minimalnej względnej wartości niepewności z uwzględnieniem WWS korzystając z zależności:

- jeżeli próbki sygnału są pobierane z odstępem $T_p = \frac{(\pi + 2\pi k)}{\omega_o}$ ($k = 0, 1, \dots$) to minimalna wartość unormowanej niepewności wynosi:

$$(12) \quad \left\{ \frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} \right\}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{x_p - \bar{x}_{m1}}{x_p + \bar{x}_{m1}}};$$

- jeżeli próbki sygnału są pobierane z odstępem $T_p = \frac{2\pi k}{\omega_o}$ ($k = 0, 1, \dots$) to maksymalna wartość unormowanej niepewności wynosi:

$$(13) \quad \left\{ \frac{\hat{u}_{AWWS}(\bar{x})}{\sigma_x} \right\}_{\max} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{x_p + \bar{x}_{m1}}{x_p - \bar{x}_{m1}}}$$

Wartość względna niepewności średniej arytmetycznej bez uwzględniania skorelowania wynosi:

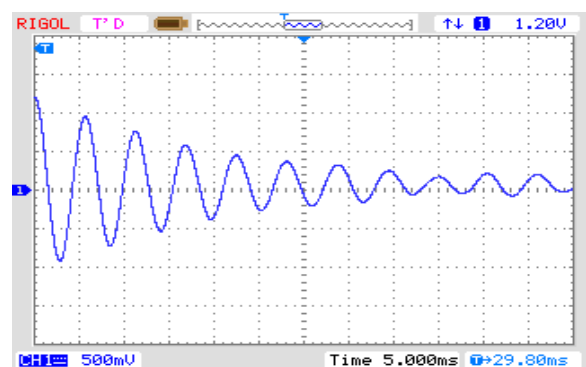
$$\frac{\hat{u}_A(\bar{x})}{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{500000}} = 0,00141421 \approx 0,0014$$

Wartości niepewności względnej z uwzględnieniem WWS przedstawiono w tabeli 1. Badania niepewności przeprowadzono dla przedziałów czasowych (odstępów próbkowania) równym: pierwszemu przejściu charakterystyki WWS przez zero τ_0 i pierwszemu lokalnemu maksimum τ_+ według zależności (13) oraz pierwszemu lokalnemu minimum τ_- zgodnie ze wzorem (12). Dodatkowo w tabeli 1 przedstawiono dla analizowanych przedziałów czasowych wartości średnich odbitych na obwiedniej $\bar{x}_{m1}$.

Tabela 1. Wyniki obliczeń wartości niepewności z uwzględnieniem WWS dla przedziałów czasowych τ_0 , τ_- , τ_+ i wartości $\bar{x}_{m1}$.

Przedziały czasowe	Wartości WWS odbitych na obwiedniej $\bar{x}_{m1}$	Wartości względna niepewności
$\tau_0 = 1,25 \text{ ms}$	1,05 V	0,0060
$\tau_- = 2,5 \text{ ms}$	1,02 V	0,0004
$\tau_+ = 5,5 \text{ ms}$	0,91 V	0,0040

Oscylloskopy cyfrowe posiadają opcje uśredniania warunkowego. Przedstawiono realizację charakterystyki WWS wykonaną za pomocą oscylloskopu cyfrowego Rigol (Rys. 8). uśredniając 256 segmentów przy progu $x_p = 1,2 \text{ V}$. Charakterystyka WWS wykonana oscylloskopem jest przydatna do prowadzenia wstępnych analiz eksperymentalnych.



Rys. 8. Eksperymentalna oscylacyjno-wykładnicza charakterystyka WWS wykonana za pomocą oscylloskopu cyfrowego.

Podsumowanie

1. Dla sygnałów losowych lub zawierających istotne składowe losowe między próbkowanymi z dużą częstotliwością wartościami sygnałów może występować powiązanie statystyczne. Uwzględnienie wpływu tego powiązania pozwala dokładniej ocenić wartość niepewności wyznaczanych charakterystyk statystycznych, co zauważa się w publikacjach [1-9].
2. Przed wykonaniem oceny wartości niepewności należy wyeliminować składowe systematyczne, a następnie przeprowadzić analizę powiązania statystycznego w szeregu danych pomiarowych, która może mieć wpływ na zwiększenie lub zmniejszenie wartości niepewności charakterystyk eksperymentalnych.
3. Zmniejszenie względnej wartości niepewności średniej arytmetycznej wymaga optymalizacji parametrów w eksperymencie pomiaru. Zwiększanie częstotliwości próbkowania i liczby pobieranych próbek powoduje korzystny wzrost wartości mianownika $\sqrt{n}$ w wyrażeniu (6), ale także niekorzystny wzrost wartości licznika $\sqrt{\lambda_m}$.
4. Jeśli podczas analizy niepewności pomiarów nie jest znany rozkład prawdopodobieństwa badanego sygnału to powinno się wykonać histogram oraz test zgodności (np. Chi kwadrat). Warto zwrócić uwagę na to, że dużo analiz statystycznych związanych jest z sygnałami, których rozkład prawdopodobieństwa jest normalny lub quasynormalny.
5. W artykule przedstawiono dla sygnałów o rozkładach normalnych oceny względnej wartości niepewności średniej arytmetycznej z wykorzystaniem warunkowej wartości średniej oraz funkcji autokorelacji. Warunkowa wartość średnia jest mniej złożona w opisie matematycznym i w sposobie obliczania niż funkcja autokorelacji. Podobnie jest z opisem i wyznaczaniem niepewności z uwzględnieniem WWS.
6. Na ocenę dokładności wyznaczania wartości średniej arytmetycznej wpływ ma współczynnik powiązania λ_m . Dla sygnałów o modelu powiązania nieujemnym (wykładniczym) współczynnik $\lambda_m > 1$ i nieuwzględnienie go powoduje zaniżenie wartości niepewności. Natomiast, dla oscylacyjno-wykładniczego modelu powiązania współczynnik λ_m może powodować zmniejszenie lub zwiększenie wartości niepewności.
7. Warunkową wartość średnią można wykorzystać do oceny stopnia powiązania statystycznego, w tym do wyznaczenia wartości niepewności w pomiarach parametrów sygnałów i układów fizycznych. Stosunkowo łatwą możliwością uśredniania warunkowego dają oscyloskopy cyfrowe. Takie charakterystyki są przydatne do prowadzenia wstępnych analiz oceny danych powiązanych statystycznie.
8. Dalszym etapem prac autora będzie badanie innych modeli do analizy powiązania statystycznego. Planowane jest analizowanie sygnału o skorelowaniu oscylacyjno-wykładniczym, którego tłumienie jest większe niż sygnału przedstawionego w tej publikacji, oraz modelowanie i badanie sygnałów o różnych innych modelach skorelowania.

Autor: mgr inż. Rafał Chorzępa, Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza, Katedra Metrologii i Systemów Diagnostycznych, ul. Wincentego Pola 2, 35-959 Rzeszów, e-mail: rchorz@prz.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Bayley G. V. and Hammersley J. M., The "Effective" Number of Independent Observations in an Autocorrelated Time Series. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 8 (1946), nr 2, 184-197
- [2] Batko W., Bal R., Analiza skorelowania wyników pomiarowych w ocenach stanu zagrożeń hałasowych środowiska, *Systemy Wspomagania w Inżynierii Produkcji*, 3 (2013), nr 5, 67-74
- [3] Dorozhovets M., Warsza Z. L., Propozycje rozszerzenia metod wyznaczania niepewności wyniku pomiarów wg Przewodnika GUM (1). Uwzględnianie wpływu autokorelacji i nieadekwatności rozkładu wyników obserwacji w niepewności typu A. *Pomiary Automatyka Robotyka*, (2007), nr 1, 6-15
- [4] Dorozhovets M., Warsza Z. L., Uncertainty type A evaluation of autocorrelated measurement observations, *Biuletyn WAT*, 57 (2008), nr 2, 143-152
- [5] Warsza Z. L., Evaluation of the type A uncertainty in measurements with autocorrelated observations, *Journal of Physics: Conference Series*, 459 (2013), 1-6
- [6] Zhang N. F., Calculation of the uncertainty of the mean of autocorrelated measurements. *Metrologia*, 43 (2006), nr 4, 276-281
- [7] Zięba A., Effective number of observations and unbiased estimators of variance for autocorrelated data – an overview, *Metrology and Measurement Systems*, 17 (2010), nr 1, 3-16
- [8] Zięba A., Ramza P., Standard deviation of the mean of autocorrelated observations estimated with the use of the autocorrelation function estimated from the data, *Metrology and Measurement Systems*, 18 (2011), nr 4, 529-542
- [9] Zięba A., Niepewność pomiaru dla ciągu obserwacji samoskorelowanych, w: Niepewność pomiarów w teorii i praktyce. Główny Urząd Miar, Warszawa 2011, 109-118
- [10] Ewaluacja danych pomiarowych. Przewodnik wyrażania niepewności pomiaru. Wydawnictwo Głównego Urzędu Miar, Warszawa 2008, 2010
- [11] Мирский Г.И., Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. Энергоиздат, Москва 1982
- [12] Kowalczyk A., Pomiarowe zastosowania warunkowego uśredniania sygnałów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2015
- [13] Kowalczyk A., Szlachta A., Hanus R., Zastosowanie warunkowego uśredniania danych skorelowanych do oceny standardowej niepewności średniej arytmetycznej. Materiały VIII Konferencji Naukowo-Technicznej PPM'11, 2011, 38-42
- [14] Kowalczyk A., Szlachta A., Hanus R., Standard uncertainty determination of the mean for correlated data using conditional averaging, *Metrology and Measurement Systems*, 19 (2012), nr 4, 787-796
- [15] Kowalczyk A., Szlachta A., Hanus R., Chorzępa R., Estimation of conditional expected value for exponentially autocorrelated data, *Metrology and Measurement Systems*, 24 (2017), nr 1, 69-78
- [16] Chorzępa R., Analiza danych z przepływomierza osadu recykulowanego w oczyszczalni ścieków, w: Propagacja i analiza sygnałów w wybranych systemach elektronicznych i telekomunikacyjnych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2020, 27-45
- [17] Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962