

doi:10.15199/48.2020.05.11

## Graficzna ocena warunków zasilania odbiorników nieliniowych

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono nowe podejście do analizy jakości energii z wykorzystaniem rachunku macierzowego oraz teorii tensorów. Przy użyciu tych narzędzi matematycznych możliwe jest opisanie zmian w czasie napięć, prądów i mocy na zaciskach obwodu trójfazowego jako tensorów drugiego rzędu. Metodę tę można wykorzystać do opisanego zachowania obwodu wielofazowego w stanie przejściowym i ustalonym.

**Abstract.** This paper presents a new approach for power quality analysis using the matrix and tensor theory. Using the mathematical tools it is possible to describe a time changes of voltages, currents and power at the terminals of a three-phase circuit as second rank tensors. This method can be used to describe behavior of multiphase circuit in transient and steady state condition. **Graphical assessment of power supply conditions for non-linear receivers.**

**Słowa kluczowe:** Obwód trójfazowy, teoria mocy, jakość zasilania, analiza tensorowa, analiza macierzowa.

**Keywords:** Multiphase Power System, Power Theory, Power Quality, Tensor Analysis, Matrix Analysis.

### Wprowadzenie

Jednym z najbardziej zawiłych problemów elektrotechniki jest opis i analiza przepływu energii elektrycznej w jednofazowych obwodach nieliniowych oraz niesymetrycznych obwodach wielofazowych. Pierwsze, bardzo istotne prace na ten temat powstały prawie sto lat temu. Autorzy tych prac Ch. P. Stainmetz, F. Buchholtz, C. I. Budeanu i S. Fryze opisali problemy pomiaru mocy w obwodach jednofazowych z elementami nieliniowymi oraz stworzyli podstawy analizy tych obwodów. Proponowane przez tych badaczy metody bazowały najczęściej na założeniu, że mierzone sygnały są sinusoidalnie zmienne lub badane układy są liniowe. Istotnym faktem jest też to, że dostępne wówczas przyrządy pomiarowe wyznaczały tylko wartości średnie lub skuteczne mierzonych napięć i prądów. Niestety pomimo powszechnej dostępności numerycznych metod analizy sygnałów, ciągle jeszcze podejmowane są próby opisu zjawisk w obwodach elektrycznych bazujące na uśrednionych wartościach napięć i prądów.

Wzrost mocy i liczby nieliniowych niesymetrycznych odbiorników wielofazowych, zasilanych często poprzez sterowane układy prostownikowe spowodował, iż rejestrowane w tych obwodach napięcia i prądy mają kształty znacznie odbiegające od kształtu sygnałów sinusoidalnie zmiennych. Opis parametrów sygnałów odkształconych, a przede wszystkim opis zmian mocy układów wielofazowych stanowił niestety poważny, odwieczny, problem [1, 2, 3, 4, 5, 6].

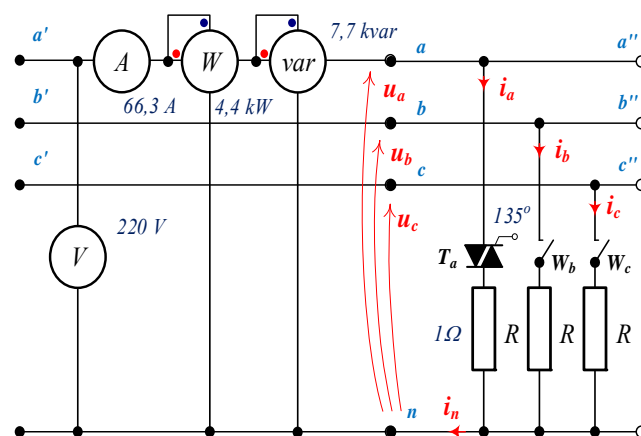
W niniejszym artykule podjęto próbę opisanie chwilowych zmian mocy na zaciskach trójfazowego niesymetrycznego i nieliniowego obwodu elektrycznego bazując na tensorowym zapisie mierzonych wartości napięć i prądów. Dokonując dekompozycji tensora mocy na dwie ortogonalne części oraz wykorzystując własności tensorów i macierzy symetrycznych i antysymetrycznych uzyskano równania opisujące zmiany mocy całego układu trójfazowego [7].

### Napięcia, prądy i moc układu trójfazowego

Przystępując do analizy i opisu zjawisk towarzyszących przepływowi energii elektrycznej z jednego fragmentu obwodu elektrycznego do drugiego fragmentu tego obwodu, należy zastosować równania ujmujące relację dla chwilowych zmian napięcia i prądu. Wprowadzając mierzone wartości napięć i prądów są wielkościami skalarnymi, ale dążąc do uogólnienia opisu można zastosować rachunek wektorowy lub tensorowy.

Dla przykładu, przeanalizujemy wyniki pomiarów napięć i prądów oraz mocy na zaciskach fragmentu trójfazowego obwodu elektrycznego [8], którego schemat zastępczy

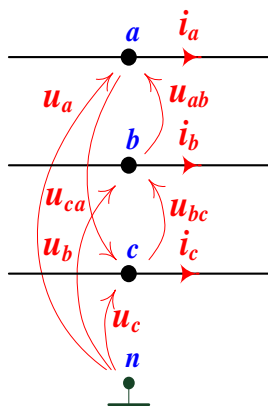
przedstawiono na rysunku 1. Przyjmijmy dla uproszczenia, że napięcie zasilania jest symetryczne i sinusoidalnie zmienne, a obciążeniem są rezystory o wartości  $R = 1 \Omega$ . W fazie  $LI(a)$  obciążenie jest załączane poprzez triak, a w pozostałych dwóch fazach do odwzorowania zmian obciążenia zastosowano wyłączniki.



Rys. 1. Schemat badanego układu

Jeżeli do opisu stanu układu (rys. 1) wykorzystamy przyrządy pomiarowe wyznaczające skuteczne wartości napięć i prądów oraz uśrednione wartości mocy, to ich wskazania będą następujące:  $U = 220 \text{ V}$ ,  $I = 66,3 \text{ A}$ ,  $P = 4,4 \text{ kW}$ ,  $Q = 7,7 \text{ kvar}$ . Bazując na wskazaniach tych przyrządów wyznaczany jest najczęściej tak zwany współczynnik mocy układu  $\lambda = P/S$  opisujący relację między mocą czynną  $P$ , a mocą pozorną  $S$  tego układu.

Niestety, jak wykazano w pracy [9], w przypadku niesymetrycznego obwodu trójfazowego wartość współczynnika mocy  $\lambda$  zależy od zastosowanego wzoru do obliczenia wartości mocy pozornej  $S$ . W rozpatrywanym przypadku uzyskujemy dwie wartości współczynnika mocy:  $\lambda_G = 0,5$  lub  $\lambda_A = 0,3$  w zależności od tego czy moc pozorną obliczymy na podstawie wskazań watomierza i waromierza ( $S_G = 8,86 \text{ kVA}$ ), czy korzystając ze wskazań woltomierza i amperomierza ( $S_A = 14,60 \text{ kVA}$ ). Ponadto, niezależnie od uzyskanych wartości współczynnika mocy można dojść do wniosku, że w celu spełnienia wymagań dostawcy energii niezbędna jest poprawa współczynnika mocy poprzez zastosowanie kompensacji pojemnościowej.



Rys. 2. Napięcia i prądy w punkcie pomiarowym

Współczesna technika pomiarowa umożliwia pomiar chwilowych zmian napięć i prądów oraz ich prezentację w postaci dowolnie zadanych wykresów. Jeżeli do analizy obwodu przedstawionego na rysunku 1 wykorzystamy dostępne w punkcie pomiarowym chwilowe zmiany napięć  $u_a, u_b, u_c$  oraz prądów  $i_a, i_b, i_c$  (rys. 2), to przyjmując umowną ortogonalną bazę odniesienia, napięcia i prądy w rozpatrywanym węzle obwodu trójfazowego można zapisać w postaci tensora napięcia  $\mathbf{u}$  oraz tensora prądu  $\mathbf{i}$  według następujących zależności:

$$(1) \quad \mathbf{u} = u_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

$$(2) \quad \mathbf{i} = i_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

W powyższych wzorach (1) i (2),  $u_{kl}$  oraz  $i_{kl}$  są wartościami napięć i prądów w punkcie pomiarowym, a  $\mathbf{e}_k$  oraz  $\mathbf{e}_l$  są składowymi wektora jednostkowego  $\mathbf{e}$ .

### Tenso mocy obwodu trójfazowego

Proces przekazywania energii elektrycznej między dwoma fragmentami trójfazowego obwodu elektrycznego poprzez zaciski  $a, b, c$ , można jednoznacznie opisać wykorzystując tensor mocy  $\mathbf{s}$  obwodu trójfazowego, który jest skalarnym iloczynem tensorowym tensora napięcia  $\mathbf{u}$  oraz tensora prądu  $\mathbf{i}$ .

$$(3) \quad \mathbf{s} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{i} = u_{kl} i_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

Jeżeli uwzględnimy fakt, że w rozpatrywanym przypadku prądy  $i_{ab}, i_{bc}, i_{ca}$  są równe zero, to macierz elementów składowych tensora mocy  $\mathbf{s}$  przyjmuje postać:

$$(4) \quad \mathbf{s} = \begin{matrix} \rightarrow \\ \downarrow a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ u_a i_a & u_{ab} i_b & (-u_{ac}) i_c \\ (-u_{ba}) i_a & u_b i_b & u_{bc} i_c \\ u_{ca} i_a & (-u_{cb}) i_b & u_c i_c \end{bmatrix}$$

Macierz mocy  $\mathbf{s}$  można także otrzymać jako bezpośredni iloczyn elementów macierzy napięć  $\mathbf{u}$  oraz macierzy prądów  $\mathbf{i}$  ( $s_{kl} = u_{kl} i_{kl}$ ).

Tensor mocy  $\mathbf{s}$ , jak każdy dowolny tensor, można przedstawić jako sumę dwóch tensorów: symetrycznego tensora  $\mathbf{p}$  oraz antysymetrycznego tensora  $\mathbf{d}$  wyznaczonych zgodnie ze wzorem:

$$(5) \quad \mathbf{s} = \frac{1}{2} (\mathbf{s} + \mathbf{s}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{s}^T) = \mathbf{p} + \mathbf{d}$$

Poniżej przedstawiono macierze obu tensorów:

$$(6) \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} u_a i_a & 0 & 0 \\ 0 & u_b i_b & 0 \\ 0 & 0 & u_c i_c \end{bmatrix}$$

$$(7) \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & u_{ab} i_b & (-u_{ac}) i_c \\ (-u_{ba}) i_a & 0 & u_{bc} i_c \\ u_{ca} i_a & (-u_{cb}) i_b & 0 \end{bmatrix}$$

Symetryczny tensor  $\mathbf{p}$  jest związany z napięciami fazowymi, a antysymetryczny tensor  $\mathbf{d}$  jest związany z napięciami międzyprzewodowymi. Tensor  $\mathbf{p}$  opisuje proces przekazywania energii zgodny z kierunkiem i kształtem prądu, czyli tej części energii elektrycznej, która ulega przemianie na ciepło lub pracę. Tensor  $\mathbf{d}$  opisuje procesy wymiany energii między źródłem siły elektromotorycznej a odbiornikiem oraz między poszczególnymi fazami odbiornika trójfazowego.

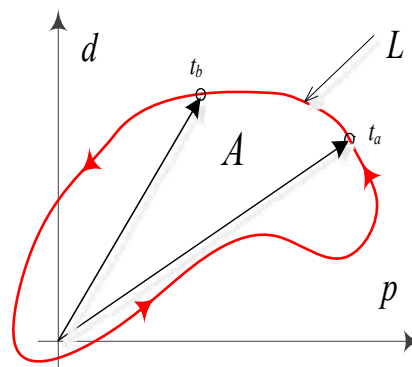
### Wykorzystanie tensora mocy

Korzystając z opisu tensorowego chwilowych zmian mocy na zaciskach układu trójfazowego można wyznaczyć kierunek przekazywania energii oraz dokonać szczegółowej analizy warunków zasilania rozpatrywanego fragmentu układu.

W obwodzie trójfazowym, w danej chwili czasu, energia elektryczna jest przekazywana zgodnie z przyjętym kierunkiem prądów liniowych (rys. 2) jeżeli wyznacznik macierzy mocy przemiany  $\mathbf{p}$  jest większy od zera:

$$(8) \quad \det \mathbf{p} = (u_a i_a) \cdot (u_b i_b) \cdot (u_c i_c) > 0$$

Znając kierunek przekazywania energii oraz analizując kształt zmian mocy na zaciskach badanego układu możemy określić charakter układu i wyznaczyć jego parametry analizując własności macierzy mocy. Takim podstawowym parametrem opisującym własności układu jest na przykład moc czynna  $P$  będąca wartością średnią chwilowych zmian mocy  $p(t)$ .



Rys. 3. Przykładowa trajektoria zmian mocy układu

W dowolnym obwodzie trójfazowym całkowita moc procesu przemiany energii elektrycznej  $p_\Sigma$ , w danej chwili czasu, jest równa sumie elementów leżących na przekątnej głównej macierzy mocy  $\mathbf{p}$ :

$$(9) \quad p_\Sigma = p = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$$

Pozostała moc układu, jest równa sumie elementów macierzy antysymetrycznej  $\mathbf{d}$ :

$$(10) \quad d_S = d = u_{cb} i_a + u_{ac} i_b + u_{ba} i_c$$

Wykorzystując ortogonalność macierzy mocy opisanych równaniami (6) i (7) zmiany mocy obwodu trójfazowego można opisać funkcją parametryczną  $d = f(p)$  oraz przestawić na płaszczyźnie w postaci trajektorii chwilowych zmian mocy badanego układu (rys. 3).

Ponieważ trajektoria zmian mocy obwodu trójfazowego jest opisana równaniami (9) i (10), to długość krzywej  $L$  rozpiętej między punktami  $t_a$  oraz  $t_b$  obliczamy korzystając ze wzoru:

$$(11) \quad L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}p\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}d\right)^2} dt$$

Pole powierzchni  $A$  zawartej między prostymi łączącymi początek układu współrzędnych oraz punkty początku i końca krzywej  $L$  obliczamy w następujący sposób:

$$(12) \quad A = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \left( p \frac{d}{dt}d - d \frac{d}{dt}p \right) dt$$

Bazując na obliczonych wartościach długości łuku krzywej parametrycznej  $d = f(p)$  oraz pola powierzchni rozpiętej na tym łuku można zdefiniować współczynnik deformacji  $\xi$  jako stosunek pola powierzchni do długości krzywej:

$$(13) \quad \xi = \frac{A}{L}$$

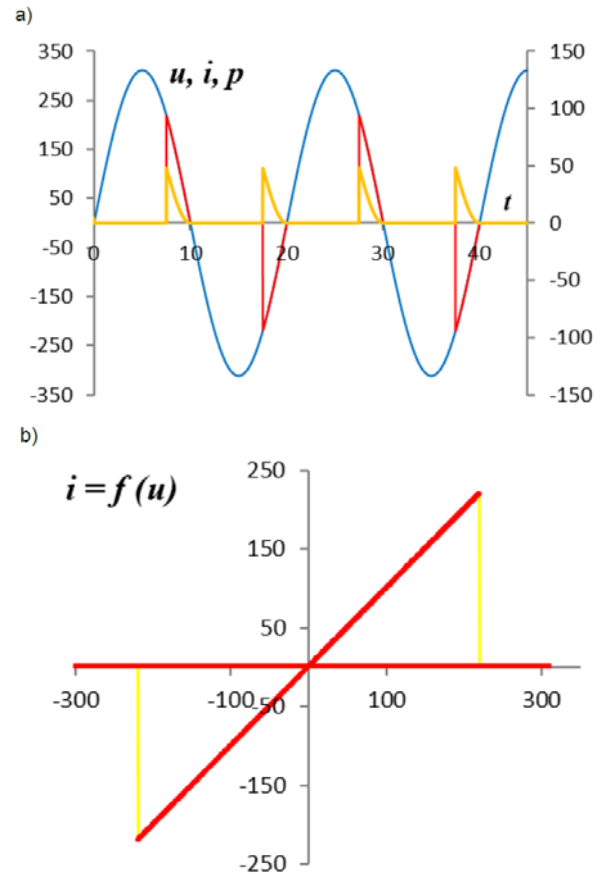
Proponowany współczynnik deformacji  $\xi$  umożliwia ocenę zniekształceń zarówno napięcia w miejscu zasilania odbiornika, jak i zniekształceń prądu pobieranego ze źródła zasilania i płynącego przez odbiornik.

W praktyce współpraca systemu energetycznego z danym odbiorcą energii elektrycznej sprowadza się do spełnienia uzgodnionych warunków zasilania przy zadanych kształtach i parametrach źródła siły elektromotorycznej. Oznacza to, że dążymy do takiego stanu pracy układu, aby poszczególne fazy źródła siły elektromotorycznej były w jednakowym stopniu obciążone, a napięcia i prądy w miejscu zasilania miały zadany kształt i wartość. Korzystając z płaszczyzny zmian mocy  $d = f(p)$ , warunki zasilania można odwzorować poprzez zaznaczenie minimalnych i maksymalnych zakresów zmian napięcia, prądu i mocy. Odwzorowanie, to może mieć postać równoległoboku lub elipsy. Zastosowanie takiej procedury umożliwia szybką ocenę warunków zasilania.

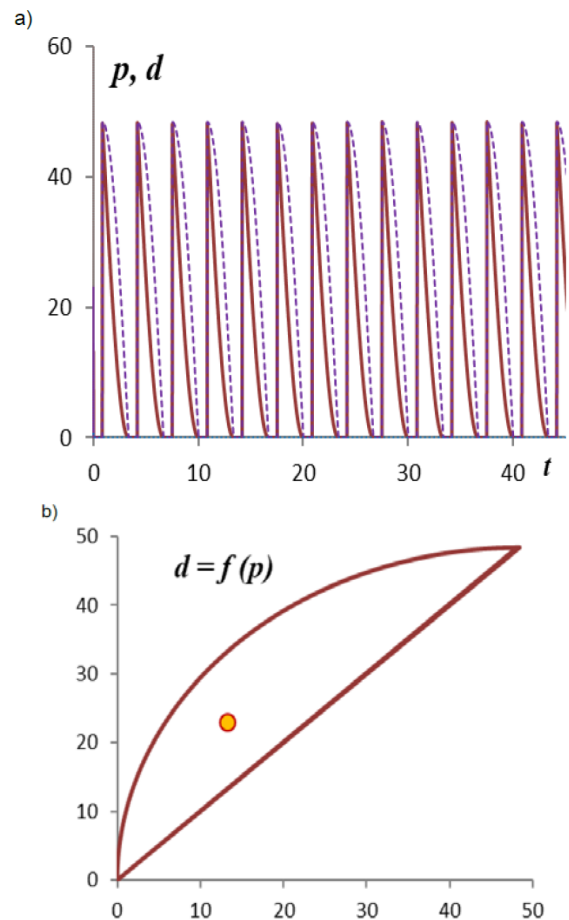
### Graficzna ilustracja zmian mocy

Jak wynika z równań (8), (9) i (10) wszelkie chwilowe zmiany stanu energetycznego dowolnego układu trójfazowego są jednoznacznie określone poprzez chwilowe zmiany wartości napięć i prądów na zaciskach tego układu. Umożliwia to identyfikację parametrów i własności badanego obwodu zarówno w stanie ustalonym, jak i w stanie przejściowym przy dowolnym kształcie wymuszenia.

Dla rozpatrywanego układu (rys. 1), zmiany w czasie wartości napięć, prądów oraz mocy w fazie  $L1$ , gdy kąt załączenia triaka wynosi  $135^\circ$ , a wyłączniki w pozostałych fazach trójfazowego odbiornika są otwarte, pokazano na rysunku 4 a. Korzystając z zamieszczonych rysunków należy pamiętać, że napięcia są wyrażone w woltach, prądy w amperach, a moc w kilowatach. Jak widać na rysunku 4 b charakterystyka prądowo-napięciowa rozpatrywanego układu jest linią prostą, co świadczy o tym, że odbiornik ma charakter czysto rezystancyjny.



Rys. 4. Zmiany napięcia, prądu i mocy w fazie  $L1$



Rys. 5. Zmiany składowych mocy trójfazowego odbiornika

Na rysunku 5 a pokazano zmiany w czasie wartości składowych mocy opisane równaniami (9) i (10) traktując obciążenie fazy  $L1$  jako fragment trójfazowego nieliniowego i niesymetrycznego odbiornika. Jak widać na wykresie, dla rozpatrywanego przypadku, obie składowe są zawsze dodatnie. Oznacza to, że w tym obwodzie cała dostarczona do odbiornika energia ulega przemianie na ciepło. W badanym układzie nie występuje proces magazynowania energii, a tym samym nie ma strat energii związanych z wymianą energii między źródłem siły elektromotorycznej a odbiornikiem.

Na rysunku 5 b przedstawiono trajektorię zmian składowych mocy trójfazowego układu na płaszczyźnie  $XY$ . Uśrednione wartości składowych mocy zostały zaznaczone w postaci punktu o współrzędnych (4,4;7,7) kVA. Jak łatwo sprawdzić są one zgodne ze wskazaniami przyrządów (rys. 1) użytych do pomiaru parametrów zmian mocy w rozpatrywanym obwodzie. Korzystając z rysunku 5 b wyraźnie widać, że obwód jest niesymetryczny i nieliniowy, a maksymalna wartość mocy jest prawie 10 razy większa niż wartość średnia.

Dla rozpatrywanego przypadku (rys. 1) oraz zmian składowych tensora mocy przedstawionych na rysunku 5 b wartość współczynnika deformacji  $\xi$  określona wzorami (11), (12) oraz (13) wynosi 0,363.

### Wnioski i uwagi

Przeprowadzone w warunkach przemysłowych pomiary oraz ich analiza wykazały [7], że stan układu trójfazowego w danej chwili czasu jest jednoznacznie opisany przez macierz tensora mocy  $\mathbf{s}$  odbiornika, która jest iloczynem tensorowym napięć  $\mathbf{u}$  oraz prądów  $\mathbf{i}$  w punkcie przyłączenia obciążenia. Dekompozycja tensora mocy  $\mathbf{s}$  na składowe  $\mathbf{p}$  oraz  $\mathbf{d}$  umożliwia śledzenie i identyfikację stanu nieliniowego i niesymetrycznego układu trójfazowego na podstawie kształtu trajektorii zmian mocy opisanych funkcją parametryczną  $d = f(p)$ .

Proponowany opis procesu przekazywania energii między fragmentami trójfazowego obwodu umożliwia:

1. Identyfikację stanu zasilanego układu dla potrzeb sterowania przepływem energii oraz ochrony od przeciążeń.
2. Pomiar ilości energii elektrycznej przekazanej do układu w przedziale czasu krótszym niż okres sygnału wymuszającego.
3. Optymalizację procesu przekazywania energii między fragmentami obwodu, czyli minimalizację strat energii.
4. Ocenę i analizę warunków zasilania w punkcie przyłączenia oraz identyfikację źródeł zakłóceń.

### Wykaz oznaczeń:

wielkość skalarna	mała litera, np. $u$ ,
wektor	pogrubiona litera, np. $\mathbf{u}$ ,
macierz	podwójna litera, np. $\mathbf{u}$
tensor	podwójna pogrubiona litera, np. $\mathbf{\mathbf{u}}$
$i, i(t)$	prąd, wartość prądu w chwili $t$ , (A)
$I$	wartość skuteczna prądu $i(t)$ , (A)
$p, p(t)$	moc, wartość mocy w chwili $t$ , (W)
$P$	moc czynna, wartość średnia $p(t)$ (W)
$Q$	moc bierna, wartość średnia $q(t)$ , (var)
$S$	moc pozorna, def. $S = U I$ , (VA)
$u, u(t)$	napięcie, wartość napięcia w chwili $t$ (V),
$U$	wartość skuteczna napięcia $u(t)$ , (V),
$pf, \lambda$	współczynnik mocy, def. $\lambda = pf = P/S$
$A$	pole powierzchni
$L$	długość krzywej
$\xi$	współczynnik deformacji, def. $\xi = A/L$
$t$	czas (s),
$T$	okres sygnału (s),
$f = 1/T$	częstotliwość (Hz),
$\omega = 2\pi f$	prędkość kątowa (rad/s),
$\varphi$	kąt przesunięcia fazowego (rad),
$a, b, c$	wielkości fazowe ( $L1, L2, L3$ ).

**Autor:** dr inż. Leszek Ładniak, Politechnika Wroclawska, Wydział Elektryczny, Wybrzeże St. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, E-mail: [l.ladniak@pwr.edu.pl](mailto:l.ladniak@pwr.edu.pl).

### LITERATURA

- [1] Shepherd W., Zakikhani P., Suggested Definition of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems, *Proc. IEE*, 119, (1972), No. 9, 1361-1362
- [2] Depenbrock M., Wirk- und Blindleistung, *ETG-Fachtagung Blindleistung*, Aachen (1979)
- [3] Akagi H., Nabae A., The p-q theory in three-phase systems under nonsinusoidal conditions, *Eur. Trans. Elect. Power*, Jan./Feb (1993), vol. 3, No. 1, 27-31
- [4] Nabae A., New definition of instantaneous active-reactive current and power based on instantaneous space vectors on polar coordinates in three-phase circuits, *IEEE Trans. Power Delivery*, Nov. (1996), vol. 11, 1238-1243
- [5] Czarnecki L. S., Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality, *Archiv fur Elektrotechnik*, 82, (1999), No. 4, 10-15,
- [6] Ustariz A. J., Cano E. A., Tacca H. E., Instantaneous Power Tensor Theory: Improvement and Assessment of the Electric Power Quality, *Proceeding of 14th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, ICHQP'2010, Bergamo-Italy, Sept. (2010), 26-29
- [7] Ładniak L., Matrix analysis of power in 3-phase system, *Proceeding of 17th International Conference on Harmonics and Quality of Power*, ICHQP'2016, Oct. (2016), 324-327
- [8] Czarnecki L. S., Physical Interpretation of the Reactive Power in Terms of the CPC Power Theory, *Electrical Power Quality and Utilization Journal*, XIII (2007), No.1, 89-93
- [9] Czarnecki L. S., Why the Power Theory has a Limited Contribution to Studies on the Supply and Loading Quality? *May* (2018), 18th ICHQP