

Ortogonalne i Nieortogonalne-Zaburzone Próbkowanie Sygnałów Harmonicznych

Streszczenie. Praca dotyczy próbkowania sygnałów harmonicznycch za pomocą dwóch próbek, które wystarczają do pełnego zidentyfikowania sygnału. Rozpatruje się dwa rodzaje próbkowania. Próbkowanie ortogonalne, które nie zniekształca operatorów przejścia przetworników liniowych czasowo-niezmienicznych i tzw. próbkowanie nieortogonalne, zniekształcające operatory przejścia i relacje mocowe.

Abstract. The work is on sampling a harmonic signals using two samples that is sufficient to fully identify the signal. Two types of sampling are considered. Orthogonal sampling, which does not distort the transient time-invariant linear transducer operators and so called non-orthogonal sampling that distorts these operators, and power relations. (**Orthogonal and Distorted Non-orthogonal Sampling of Harmonic Signals**).

Słowa kluczowe: sygnały harmoniczne, próbkowanie, operatory, moce.

Keywords: Harmonic signals, sampling, operators, powers.

Próbkowanie ortogonalne sygnałów harmonicznycch

Zadany sygnał harmonicznycch [1,2,3]

$$(1) \quad y(\omega t) = \sqrt{2}|Y| \cos(\omega t + \angle Y)$$

ze swoją reprezentacją zespoloną

$$(2) \quad Y = |Y| e^{j\angle Y} = Y_1 + jY_2$$

ma pobierane próbki $y(0)$, $y(3\pi/2)$. Między współrzędnymi liczby zespolonej a próbkami łatwo odkryć następującą relację

$$(3) \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(\frac{3}{2}\pi) \end{bmatrix}$$

Próbki pobierane są w odstępach kątowym $\frac{2\pi}{4}$,

dlatego próbkowanie to zostanie nazwane ortogonalnym. Liczbę zespoloną Y można przedstawić w postaci 2-wektora, albo równoważnie w formie 2x2 macierzy:

$$(4) \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \longrightarrow [Y] = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{bmatrix}$$

W szczególności, gdy 1 jest jednostką rzeczywistą a j jednostką urojoną, to znaczy:

$$I = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1} \quad \text{- macierz jednostkowa rzeczywista}$$

$$[j] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \doteq \mathbf{J} \quad \text{- macierz jednostkowa 'urojona'}$$

Operację $[\bullet]$ nazywa się matrycyzacją liczby zespolonej, a operację odwrotną $[\bullet]^{-1}$ rewektoryzacją.

Relacja sprzężenia daje:

$$(5) \quad Y^* = \begin{bmatrix} Y_1 \\ -Y_2 \end{bmatrix} \longrightarrow [Y^*] = [Y]'$$

Gdzie znak $[\bullet]'$ znak transpozycji macierzy. W szczególności

$$\mathbf{J}^* = -\mathbf{J}$$

Działanie mnożenia liczb zespolonych

Definiuje się działanie komutatywne, mnożenie:

$$(6) \quad XY \doteq [X]Y = [Y]X$$

Zachodzi:

$$XYZ = [XY]Z = [X]YZ = [X][Y]Z$$

Stąd wynika prawo multiplikatywności:

$$(7) \quad [XY] = [X][Y] = [Y][X]$$

zachodzi również prawo addytywności:

$$(8) \quad [X + Y] = [X] + [Y] = [Y] + [X]$$

Iloczyn skalarny, moce

Łatwo wykazać, że iloczyn skalarny spełnia wyrażenie

$$(9) \quad (X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\omega t)y(\omega t)d\omega t = X'Y = (XY^*, I)$$

oraz

$$(10) \quad [X][Y^*] = \begin{bmatrix} (X, Y) \\ (X, JY) \end{bmatrix}$$

Oznaczając przez U, I zespolone napięcie i prąd dwójnika elektrycznego otrzymuje się więc moc czynną P i bierną Q .

$$(11) \quad [U][I^*] = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (U, I) \\ (U, JI) \end{bmatrix}$$

Moduł norma wyznacznik: $|\bullet|, \|\bullet\|, \|\bullet\|$

Zachodzi:

$$(12) \quad (X, X) = |X|^2 = X'X = [X]$$

a także

$$(13) \quad XX^* = |X|^2 \mathbf{1} ; [X][X^*] = |X|^2 \mathbf{1}$$

Odwrotność, ułamek, impedancja

Łatwo się przekonać, że:

$$[Y]^{-1} = \frac{[Y]'}{|Y|^2}$$

oraz ogólniej

$$(14) \quad \frac{[U]}{[I]} = \frac{[U][I^*]}{|I|^2} = \frac{1}{|I|^2} \begin{bmatrix} [P] \\ [Q] \end{bmatrix}$$

Ta ostatnia równość definiuje operator impedancji dwójnika elektrycznego.

Rozkład biegunowy

Niech U będzie liczbą zespoloną unitarną, tj:

$$UU^* = I \longrightarrow |U| = 1$$

Liczba taka ma rozkład wykładniczy, który da się rozdzielić na dwie składowe ortogonalne [4,5]

$$(15) \quad U = e^{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} = \frac{1}{2}(U + U^*) + \frac{1}{2}(U - U^*) \\ = ch\phi + sh\phi$$

gdzie

$$\phi^* = -\phi \longrightarrow \phi = \varphi j \longrightarrow [\phi] = \varphi \mathbf{J}; \quad \varphi - \text{skalar}$$

Nietrudno się przekonać, że zachodzi

$$[ch\phi] = \mathbf{1} \cos \varphi, \quad [sh\phi] = \mathbf{J} \sin \varphi$$

$$(16) \quad \begin{aligned} (sh\phi, ch\phi) &= 0 \\ |ch\phi|^2 + |sh\phi|^2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{- ortogonalność}$$

$$(17) \quad (ch\phi)^2 - (sh\phi)^2 = I \quad \text{- hiperboliczność}$$

Dowolną liczbę zespoloną można rozłożyć multiplikatywnie:

$$Y = HU, \quad H^* = H, \quad U \text{ - unitarne}$$

co nazywa się rozkładem biegunowym.

Zachodzi

$$(Y, Y^{-1}) = (U^2, I)$$

skąd wynika, że

$$(18) \quad \begin{aligned} |sh\phi|^2 &= \frac{1}{2}(1 - (Y, Y^{-1})) \\ |ch\phi|^2 &= \frac{1}{2}(1 + (Y, Y^{-1})) \end{aligned}$$

ale także wynikają nierówności

$$|sh\phi| \leq 1, \quad |(Y, Y^{-1})| \leq 1$$

które sprawiają, że wskaźniki te mogą służyć do oceny wartości mocy nieczynnej odbiornika elektrycznego.

Próbkowanie nieortogonalne, transformacje ukośnokątne

W sygnale harmonicznym pobrane są dwie próbki w punktach czasowych t_1, t_2 i w odpowiadających im punktach kątowych $\alpha_1 = \omega t_1, \alpha_2 = \omega t_2$. Zachodzi wówczas:

$$(19) \quad \begin{aligned} y_1 &= |Y| \cos(\alpha_1 + \sphericalangle Y) \\ &= |Y| (\cos \alpha_1 \cos \sphericalangle Y - \sin \alpha_1 \sin \sphericalangle Y) \end{aligned}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} y_2 &= |Y| \cos(\alpha_2 + \sphericalangle Y) \\ &= |Y| (\cos \alpha_2 \cos \sphericalangle Y - \sin \alpha_2 \sin \sphericalangle Y) \end{aligned}$$

Między wartościami próbek y_1, y_2 a współzrędnymi liczby zespolonej Y_1, Y_2 zachodzi zatem relacja

$$y_1 = (\cos \alpha_1) Y_1 - (\sin \alpha_1) Y_2$$

$$y_2 = (\cos \alpha_2) Y_1 - (\sin \alpha_2) Y_2$$

albo w formie skróconej wektorowo-macierzowej

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ c_2 & -s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

lub jeszcze krócej

$$(21) \quad y = \mathbf{T}Y; \quad Y = \mathbf{T}^{-1}y$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ c_2 & -s_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -s_2 & s_1 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{T}| = \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \doteq c$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 - \alpha_2); \quad \sin \alpha \doteq s$$

Transformacja współzrędných sygnału harmonicznego o częstotliwości ω zadaną macierzą \mathbf{T} nazywa się transformacją ukośną.

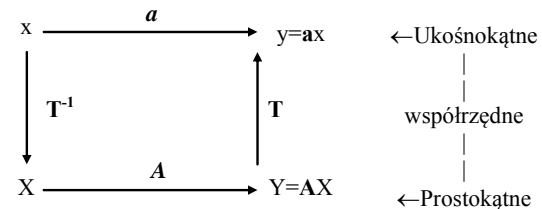
Zachodzą następujące tożsamość wiążące współczynniki transformacyjne c, s :

$$(c_{1,2})^2 + (s_{1,2})^2 = 1; \quad c^2 + s^2 = 1$$

$$c = s_1 c_2 - s_2 c_1; \quad s = c_1 c_2 + s_1 s_2.$$

Operatory, transformacje kongruentne

Diagram operatorów działających we współzrędných prostokątnych Y i we współzrędných ukośnych y jest następujący [1]:



Rys. 1. diagram przejścia między dwoma układami współzrędných

Wynikają stąd reguły transformacyjne macierzy-operatorów $a \longleftrightarrow \mathbf{A}$ w postaci:

$$(22) \quad \begin{aligned} a &= \mathbf{TAT}^{-1} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{T}^{-1}a\mathbf{T} \end{aligned} \quad \text{skąd: } ab = \mathbf{TABT}^{-1}$$

Są to tzw. transformacje kongruentne (TK). Nietrudno przekonać się że są one liniowe tj dla rzeczywistych stałych β, γ :

$$\beta\mathbf{A} + \gamma\mathbf{B} \longleftrightarrow \beta a + \gamma b$$

Tak więc do ogólnej transformacji operatora wystarczy transformacja kongruentna operatorów jedności rzeczywistej i urojonej

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

w wyniku otrzymuje się

$$I \longrightarrow I; \quad j = \mathbf{TJT}^{-1} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & -s \end{bmatrix}$$

Wyznaczniki i moduły

Z równości

$$|a| = |TAT^{-1}| = |A|$$

wynika, że TK zachowuje wyznacznik, a w szczególności $|j| = |J| = 1$

Nie jest też trudno udowodnić, że jeżeli $A B$ komutuje, to $a b$ też komutuje

Impedancja, admittance

Impedancja dwójnika elektrycznego we współrzędnych prostokątnych (R, X - skalary: rezystancja, reaktancja) ma postać

$$(23) \quad Z = RI + XJ = \begin{bmatrix} R & -X \\ X & R \end{bmatrix} \xrightarrow{[*]^{-1}} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix}$$

transformuje się do formy

$$(24) \quad z = RI + Xj = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} Rc + Xs & -X \\ X & Rc - Xs \end{bmatrix}$$

Moduł

$$\sqrt{|z|} = \sqrt{|Z|} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Stąd

$$(25) \quad z = \frac{\sqrt{|z|}}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} c \cos \varphi + s \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & c \cos \varphi - s \sin \varphi \end{bmatrix} \\ = \frac{\sqrt{|z|}}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \alpha) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos(\varphi + \alpha) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} \quad - \text{ kąt fazowy impedancji we}$$

współrzędnych ortogonalnych,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 - \alpha_2) \quad - \text{ kąt zaburzenia od próbkowania}$$

ortogonalnego, $\alpha=0$ przy próbkowaniu ortogonalnym.

Ten ostatni wzór podaje wyrażenie na impedancję dwójnika zniekształconą kątem α . Jest ona 2x2 macierzą-operatorem, który nie da się zrewektoryzować do zwykłej liczby zespolonej w prostokątnym układzie współrzędnych. Zniekształcenie znika przy $\alpha=0$ i wtedy operator impedancji równoważny jest liczbie zespolonej

$$\sqrt{|z|} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \xrightarrow{[*]^{-1}} \sqrt{|z|} e^{j\varphi}$$

Właściwości transformacji kongruentnej $a \longleftrightarrow A$

Z wyrażen

$$a = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}aT$$

wynika że:

$$ab \longleftrightarrow AB, \quad a + b \longleftrightarrow A + B, \quad \alpha a \longleftrightarrow \alpha A,$$

$$a^{-1} \longleftrightarrow A^{-1}$$

W szczególności wyznaczenie operatora admittance

$y = z^{-1}$ daje:

$$z = \frac{\sqrt{|z|}}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \alpha) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos(\varphi + \alpha) \end{bmatrix} \xrightarrow[\varphi \rightarrow -\varphi]{\sqrt{|z|} \rightarrow \sqrt{|z|}^{-1}}$$

$$y = \frac{\sqrt{|z|}^{-1}}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \alpha) & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos(\varphi - \alpha) \end{bmatrix}'$$

gdyż

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}_{\varphi \rightarrow -\varphi} = [e^{j\varphi}]'$$

Rozkład biegunowy

Ze wzoru transformacyjnego

$$a^n = TA^nT^{-1}, \quad n \text{ - liczba naturalna}$$

wynika że TK zachowuje potęgę operatora. Tak więc w szczególności

$$j^{2n} = (-1)^n I$$

$$j^{2n+1} = (-1)^n j$$

Zatem dla skalaru φ zachodzi

$$(26) \quad e^{j\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = ch(j\varphi) + sh(j\varphi) = \\ = I \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi)^{2n}}{2n!} + j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = I \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Wzór Parsewala, iloczyn skalarny, moce

Definiuje się tzw prawostronny operator zniekształcenia

$$\Delta: j = J\Delta$$

skąd

$$\Delta = J^{-1}j = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{bmatrix}$$

Nietrudno udowodnić, że dla iloczynów skalarnych zachodzą równości:

$$U'I = \frac{1}{c} i' \Delta u = \frac{1}{c} u' \Delta i$$

$$U'JI = -\frac{1}{c} i' J u = \frac{1}{c} u' J i$$

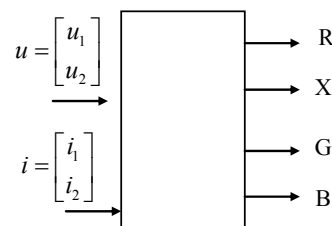
Tworzą one tzw czynny i bierny wzór Parsewala. Wynikają stąd wyrażenia dla mocy czynnej i biernej dwójnika elektrycznego:

$$(27) \quad P = \frac{R}{2c} i' \Delta i = \frac{G}{2c} u' \Delta u = \frac{1}{2c} u' \Delta i \\ Q = \frac{X}{2c} i' \Delta i = -\frac{B}{2c} u' \Delta u = \frac{1}{2c} u' J i$$

gdzie R,G; X,B - rezystancja, konduktancja, reaktancja, susceptancja dwójnika.

Stąd otrzymuje się również następujące wzory

$$(28) \quad R = \frac{u' \Delta i}{i' \Delta i}, \quad G = \frac{u' \Delta i}{u' \Delta u} \\ X = \frac{u' J i}{i' \Delta i}, \quad B = -\frac{u' J i}{u' \Delta u}$$



Rys.2. diagram procesu wyznaczania parametrów impedancyjnych dwójnika poprzez pomiary próbek napięcia i prądu

Mogą one służyć do wyznaczania parametrów impedancyjnych dwójnika poprzez pomiary próbek napięcia i prądu.

Operator sprzężony

Można wykazać, że:

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}' \xrightarrow{TK} \mathbf{z}^* = \Delta^{-1} \mathbf{z}' \Delta$$

a więc transformacja kongruentna zniekształca regułę operatora sprzężonego. Jednakże

$$\Delta^* = \Delta \quad i \quad \mathbf{j}^* = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{z}^* = R\mathbf{I} - X\mathbf{j}$$

Zachodzi też

$$\frac{1}{2}(\mathbf{z} + \mathbf{z}^*) = R\mathbf{I} \quad ; \quad \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^*) = X\mathbf{j}$$

$$\mathbf{z}\mathbf{z}^* = |\mathbf{z}|I$$

Charakterystyki częstotliwościowe

Przy zmieniającej się częstotliwości, jej funkcjami stają się

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi}{2} - \omega(t_1 - t_2) \quad - \quad \text{kąt zaburzenia}$$

ortogonalnego pobierania próbek,

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad - \text{charakterystyka fazowa impedancji,}$$

$$\sqrt{|\mathbf{z}|}(\omega) = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2} \quad - \text{charakterystyka}$$

modułowa impedancji

a także

$$c(\omega) = \cos[\alpha(\omega)], \quad s(\omega) = \sin[\alpha(\omega)]$$

Częstotliwościowa funkcja operatora impedancji zaburzonego kątem $\alpha(\omega)$ przyjmuje postać

$$\mathbf{z}(\omega) = \frac{\sqrt{|\mathbf{z}|}(\omega)}{c(\omega)} \begin{bmatrix} \cos[\varphi(\omega) - \alpha(\omega)] & -\sin[\varphi(\omega)] \\ \sin[\varphi(\omega)] & \cos[\varphi(\omega) + \alpha(\omega)] \end{bmatrix}$$

Wnioski

W pracy pokazano że sygnał harmoniczny można jednoznacznie zidentyfikować dwiema próbkami pobranymi w odstępie kątowym $\Delta\alpha$ co odpowiada odstępowi

czasowemu $\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} T$. Próbkowanie w odstępie

kątowym $\alpha = 2\pi/4$ nazywa się ortogonalnym. Wtedy pobrane próbki tworzą liczbę zespoloną identyfikującą sygnał harmoniczny o zadanej częstotliwości. Przy innym odstępie kątowym pobrania próbek, liczba zespolona identyfikująca sygnał harmoniczny ulega zniekształceniu, tzw. "transformacji ukośnokątnej". Powoduje to zniekształcenie operatorów transmitancji przetworników, które nie dają się już opisać liczbami zespolonymi lecz 2x2-macierzami. Zniekształcenie takie opisano na przykładzie impedancji dwójnika elektrycznego. Znika ono przy odstępie kątowym $\Delta\alpha = 2\pi/4$, albo czasowym $\Delta t = T/4$ i wtedy operator transmitancji znów charakteryzuje liczba zespolona o współrzędnych prostokątnych. Próbkowanie takie, nazywane nieortogonalnym zniekształca też wyrażenia na moce, ale nie zmienia pewnych praw liczb zespolonych, w szczególności wzoru Eulera, czy praw kaskady operatorów i wzoru Wienera dla sprzężenia zwrotnego.

Autorzy: prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, E-mail:

e-3@pk.edu.pl; dr inż. Marcin Jaraczewski,

E-mail: jaracz@pk.edu.pl, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Katedra Elektrotechniki i Elektroniki teoretycznej i Informatyki ul. Warszawska 24.

LITERATURA

- [1] Siwczyński M. Jaraczewski M.: *Ukośne liczby zespolone w opisie obwodów elektrycznych przy sinusoidalnych i prawie okresowych przebiegach prądów i napięć*, Przegląd Elektrotechniczny 6/2016, 172--175
- [2] William Clifford, On the Space-Theory of Matter, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, (2) 157-158, 1876.
- [3] Baylis William E., "Clifford (geometric) algebra with applications to physics, mathematics and engineering", Birkhauser, 1996.
- [4] Yu Xuegang and Yu Xueqian, hyperbolic complex analysis and Theory of Relativity, Acta Mathematica Scientia, 15(4), 435-441 1995
- [5] Wang Rui; Yu Xuegang The Geometric Connections of Two Kinds of Complex Number, Conference: International Conference on Information Technology and Computer Science Location: Kiev, UKRAINE Date: JUL 25-26, 2009 ITCS: 2009 INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION TECHNOLOGY AND COMPUTER SCIENCE, PROCEEDINGS, VOL 2, PROCEEDINGS Pages: 583-585 Published: 2009