

Uproszczona metoda analizy pola termicznego w izolacji przewodu przy wykorzystaniu funkcji Greena

Streszczenie. W pracy przedstawiono uproszczoną metodę analizy pola termicznego w izolacji przewodu przy wykorzystaniu funkcji Greena. Podstawą metody jest dekompozycja obszarów przewodu. Żyłę przewodu modelowano jako element skupiony, zaś izolację analizowano jako element o parametrach rozłożonych. W rezultacie, w pracy wyznaczono krzywe rozgrzewu oraz termiczne stałe czasowe w izolacji przewodu przy stałej (uśrednionej) i zmiennej rezystywności żyły przewodu. Wyniki pozytywnie zweryfikowano metodą elementów skończonych.

Abstract. In the paper a simplified method of determination of the thermal field in wire insulation was presented by using the Green's function. The basic of the method is the decomposition of the regions of the wire. The core of the insulation was modeled as a inert element of the first order, and the insulation was analyzed as the distributed parameter. As a result, heating up curves and time constant in the insulation of the wire were determined for the constant (averaged) and variable resistivity. The result was positively verified using the finite element method. (A simplified method of the thermal field analysis in the core insulation using the Green's function).

Słowa kluczowe: metody analityczne, równanie przewodnictwa cieplnego, pole termiczne, izolacja przewodu

Keywords: analytical method, heat conduction equation, thermal field, insulation of the wire

Wstęp

Uprozczone rozwiązania problemów polowych mają duże znaczenie w elektrotechnice. Pozwalają zwykle uzyskać szybciej wynik rozwiązania pomijając przy tym badania nad zbędnymi szczegółami. W wielu też przypadkach uzyskanie rozwiązania dokładnego jest trudne lub niemożliwe.

Praca nawiązuje do wcześniejszej publikacji autora [1]. W [1] przedstawiono metodę obliczania pola termicznego w gołym przewodzie przy uwzględnieniu zmiennej rezystywności żyły. W [1] pokazano, że ze względu na dużą wartość cieplnej przewodności żyły, rozkłady pola termicznego oraz stałe czasowe są praktycznie jednakowe w całej objętości żyły. W przypadku analizy pola termicznego przewodu z izolacją (rys. 1), nie można pominąć przestrzennej zmiany rozkładu pola. W takim układzie, ze względu na znacznie wolniejszy przepływ ciepła pole termiczne będzie zarówno funkcją czasu jak i położenia

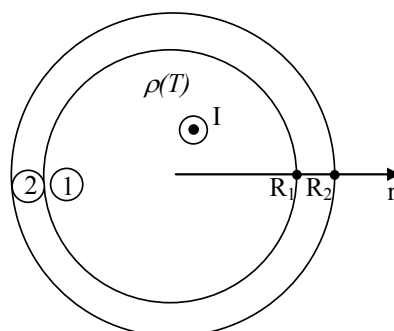
Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie metody wyznaczania rozkładu pola w izolacji przewodu na podstawie znajomości stałej czasowej jego żyły. Podstawą metody jest dekompozycja obszarów przewodu. W związku z tym osobno rozpatrywano dwa obszary. Żyłę przewodu modelowano elementem skupionym pierwszego rzędu. Z kolei izolację analizowano jako element o parametrach rozłożonych. Odpowiednie zagadnienie brzegowo-początkowe rozwiązano przy wykorzystaniu funkcji Greena.

Matematyczny model pola termicznego w żyłce i izolacji przewodu

Przedmiotem analizy jest model przewodu przedstawiony na rys. 1. Wewnętrznym obszarem jest miedziana żyła (indeks 1). Zewnętrzny obszar stanowi izolacja przewodu (indeks 2). Założono, że przewód znajduje się w temperaturze otoczenia T_0 , jest osłonięty od bezpośredniego promieniowania słonecznego oraz, że jego długość jest znacznie większa od jego wymiarów przekroju poprzecznego. Przyjęto, że rezystywność elektryczna materiału żyły (miedzi) zmienia się według następującej zależności [2]

$$(1) \quad \rho(T) = \rho(T_0)[1 + \varepsilon(T - T_0)],$$

$\rho(T_0)$ - rezystywność materiału w temperaturze otoczenia T_0 , ε - temperaturowy współczynnik rezystywności. Pozostałe parametry termofizyczne przewodu (λ - cieplna przewodność, c - ciepło właściwe), ze względu na ich znacznie mniejsze zmiany od temperatury przyjęto jako stałe [3].



Rys. 1. Przekrój poprzeczny przewodu z izolacją

W [1], [4] wykazano, że cieplna stała czasowa żyły przy stałej (uśrednionej) jak i zmiennej rezystywności miedzi jest praktycznie jednakowa w całej objętości żyły (nie zależy od współrzędnej radialnej r). W takim przypadku żyłę przewodu można aproksymować elementem skupionym pierwszego rzędu o następującej charakterystyce skokowej

$$(2) \quad T_1(t) = T_0 + v(1 - e^{-t/\tau_c}) \quad \text{dla } r = R_1, \quad t > 0, \quad \text{gdzie}$$

τ_c - cieplna stała czasowa żyły, v - przyrost temperatury żyły. Stałą czasową w (2) można określić z przybliżeniem. W tym celu można wykorzystać zależności podane w [1], [4] lub metody pomiarowe [5]. W [1] m. in. podano wzory umożliwiające obliczenie stałej czasowej przy uwzględnieniu zmiennej rezystywności żyły przewodu.

Drugim wyodrębnionym obszarem przewodu jest pierścień izolacji (rys. 1). W pracach [4], [6] wykazano, że pole termiczne jest nie tylko funkcją czasu, ale zależy też od współrzędnej radialnej. Z tego powodu warstwę izolacji należy potraktować jako element o parametrach rozłożonych. Zagadnienie brzegowo-początkowe izolacji dogodnie jest przedstawić względem termicznych przyrostów $v_2(r, t)$ odniesionych do temperatury otoczenia T_0 .

$$(3) \quad v_2(r, t) = T_2(r, t) - T_0$$

Przyrost $v_2(r, t)$ w izolacji jest opisany jednorodnym równaniem przewodnictwa cieplnego [3], [7]

$$(4) \quad \frac{\partial^2 v_2(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial t} = 0$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$, $t > 0$, gdzie:

$$\chi_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \mu_2} - \text{dyfuzyjność, } r - \text{współrzędna radialna, } R_1 -$$

promień żyły, R_2 - promień izolacji, t - czas. Indeks 2 oznaczono parametry izolacji.

Ponieważ żyła i izolacja przylegają ściśle do siebie, na granicznym okręgu $r=R_1$ przyrosty muszą być ciągłe. Po wykorzystaniu (2) oraz (3) wynika warunek brzegowy

$$(5) \quad v_2(R_1, t) = v(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}) \quad \text{dla } t > 0.$$

Zewnętrzna powierzchnia przewodu dla ($r=R_2$) oddaje ciepło za pośrednictwem konwekcji naturalnej oraz promieniowania. Wspomnianą wymianę opisuje brzegowy warunek Hankela [3], [7]

$$(6) \quad \left. \frac{\partial v_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{\alpha}{\lambda_2} [v_2(R_2, t)],$$

gdzie: α - współczynnik przejmowania ciepła.

Przed włączeniem zasilania układ znajdował się w temperaturze otoczenia T_0 . Po uwzględnieniu definicji przyrostu (3) wynika warunek początkowy

$$(7) \quad v_2(r, 0) = 0 \quad \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2.$$

Funkcja Greena

Przedstawione wyżej zagadnienie brzegowo-początkowe (4)-(7) rozwiązano przy wykorzystaniu funkcji Greena $G=G(r, t, \xi, \eta)$ [8], [9], [10]. Jej zagadnienie brzegowo-początkowe jest następujące

$$(8) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_2} \delta(r - \xi) \delta(t - \eta) \quad \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2, t \geq \eta,$$

$$(9) \quad G|_{r=R_1} = 0,$$

$$(10) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{\alpha}{\lambda_2} [G]_{r=R_2}$$

(11) $G=0$ dla $t < \eta$ - warunek przyczynowości,

(12) $G(r, t, \xi, \eta) = G(\xi, -\eta, r, t)$ - warunek wzajemności funkcji Greena, gdzie prawa strona (8) jest iloczynem przesuniętych impulsów Diraca (w przestrzeni o ξ , w czasie o η). Uwzględniając warunki brzegowe (5),(6),(9),(10) oraz początkowe (7), (11), pole termiczne w izolacji można przedstawić za pomocą następującej zależności [8]

$$(13) \quad v_2(r, t) = \chi_2 \int_0^t v_2(R_1, \eta) \xi \left. \frac{\partial G(r, t, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=R_1} d\eta.$$

W celu wyznaczenia rozkładu pola $v_2(r, t)$ na podstawie (13) konieczna jest znajomość funkcji Greena. W [7], [8] wykazano, że przy zastosowaniu funkcji Greena w zagadnieniach z niejednorodnymi warunkami brzegowymi (5) uzyskiwane rozwiązania na podstawie (13) są słabo zbieżne na granicach obszarów. W związku z tym, do wyznaczenia rozkładu $v_2(r, t)$ wykorzystano alternatywną (zmodyfikowaną) wersję funkcji Greena [8]. Przy jej zastosowaniu, pole termiczne w izolacji można przedstawić za pomocą następującej zależności [8]

$$(14) \quad v_2(r, t) = v_2^*(r, t) - \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial v_2^*(\xi, \eta)}{\partial \eta} \xi G(r, t, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

gdzie $v_2^*(r, t)$ jest rozwiązaniem pomocniczego zagadnienia względem (4)-(7) spełniającego tylko warunki brzegowe [8]. Zagadnienie brzegowe dla $v_2^*(r, t)$ jest postaci

$$(15) \quad \frac{\partial^2 v_2^*(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2^*(r, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$(16) \quad v_2^*(R_1, t) = v(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}) \quad \text{dla } t > 0.$$

$$(17) \quad \left. \frac{\partial v_2^*(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{\alpha}{\lambda_2} [v_2^*(R_2, t)],$$

Zagadnienie (15)-(17) rozwiązano metodą rozdzielania zmiennych [3], [7] otrzymując

$$(18) \quad v_2^*(r, t) = v \left(\frac{\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)}{\frac{\lambda_2}{R_2 \alpha} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + 1 \right) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right)$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$.

Następnie należy określić funkcję Greena $G(r, t, \xi, \eta)$ w (14), konieczną do wyznaczenia poszukiwanego rozkładu $v_2(r, t)$. W celu jej wyznaczenia wprowadzono jednorodne pomocnicze zagadnienie [7], [8] względem funkcji $\Psi(r, t)$

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \Psi(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = 0$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$, $t > 0$,

$$(20) \quad \Psi(R_1, t) = 0$$

$$(21) \quad \left. \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{\alpha}{\lambda_2} [\Psi(R_2, t)],$$

$$(22) \quad \Psi(r, 0) = F(r) \quad \text{dla } R_1 \leq r \leq R_2,$$

gdzie $F(r)$ jest pewnym dowolnym rozkładem warunku początkowego.

Zagadnienie (19)-(22) rozwiązano dwiema metodami: rozdzielania zmiennych [3], [7] i funkcji Greena [8], [10], zdefiniowanej za pomocą (8)-(11). Po odpowiednim porównaniu rozwiązań oraz zamianie $t \rightarrow t - \eta$ otrzymano poszukiwaną funkcję Greena

(23)

$$G(r, t, \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_0 \left(\gamma_n \frac{\xi}{R_1} \right) Z_0 \left(\gamma_n \frac{r}{R_1} \right)}{R_2^2 \left(Z_0^2 \left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1} \right) + Z_1^2 \left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1} \right) \right) - R_1^2 Z_1^2 \left(\gamma_n \right)} e^{-\frac{\lambda_2}{R_1^2} \chi_2 (t - \eta)}$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$, $t \geq \eta$, gdzie

(24)

$$Z_p\left(\gamma_n \frac{r}{R_1}\right) = J_p\left(\gamma_n \frac{r}{R_1}\right) \left[Y_0\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\gamma_n \lambda_2}{R_1 \alpha} Y_1\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) \right] - Y_p\left(\gamma_n \frac{r}{R_1}\right) \left[J_0\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\gamma_n \lambda_2}{R_1 \alpha} J_1\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) \right]$$

gdzie γ_n jest określone za pomocą równania wartości własnych

$$(25) \quad Z_0(\gamma_n) = 0,$$

zaś $J_p(\dots), Y_p(\dots)$ są funkcjami Bessela i Neumanna pierwszego rodzaju rzędu p .

Pole termiczne oraz stała czasowa izolacji przewodu

Nieustalone pole termiczne w izolacji $v_2(r, t)$ wyznaczono na podstawie zależności (14) przy uwzględnieniu definicji przyrostu (3). W tym celu podstawiono funkcję Greena (23) i pomocniczą funkcję (18) do (14). Po odpowiednim scałkowaniu, uproszczeniu i uwzględnieniu (3), otrzymano w rezultacie nieustalony rozkład pola w izolacji

(26)

$$T_2(r, t) = T_0 + v_2^*(r, t) - v \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)}{\frac{\lambda_2}{R_2 \alpha} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + 1 \right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\gamma_n) Z_0\left(\gamma_n \frac{r}{R_1}\right) \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau_c}} - e^{-\chi_2^2 \frac{\gamma_n^2}{R_1^2} t} \right)$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$, $t > 0$, gdzie

(27)

$$A_n(\gamma_n) = \frac{2R_1^3 R_2 Z_1\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) - R_1^4 Z_1(\gamma_n)}{\gamma_n (\gamma_n^2 \chi_2^2 \tau_c - R_1^2) \left[R_2^2 \left(Z_0^2\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) + Z_1^2\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) \right) - R_1^2 Z_1^2(\gamma_n) \right]}$$

zaś $v_2^*(r, t)$ dana jest wzorem (18).

Z kolei stacjonarny rozkład termicznego pola otrzymano z (26) przy $t \rightarrow \infty$

$$(28) \quad T_{2s}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_2(r, t) = T_0 + v \left(\frac{\ln\left(\frac{R_1}{r}\right)}{\frac{\lambda_2}{R_2 \alpha} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + 1 \right)$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$.

Stałą czasową izolacji wyznaczono na podstawie znanego kryterium uśrednionej stałej czasowej [11], [12]

$$(29) \quad \tau(r) = \int_0^{\infty} \frac{T_2(r, t) - T_{2s}(r)}{T_2(r, t=0) - T_{2s}(r)} dt.$$

Po podstawieniu (26) i (28) do (29) otrzymano

$$(30) \quad \tau(r) = \tau_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_0\left(\gamma_n \frac{r}{R_1}\right) \left[R_1^3 R_2 Z_1\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) - R_1^4 Z_1(\gamma_n) \right]}{\gamma_n^3 \chi_2^2 \left[R_2^2 \left(Z_0^2\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) + Z_1^2\left(\gamma_n \frac{R_2}{R_1}\right) \right) - R_1^2 Z_1^2(\gamma_n) \right]}$$

dla $R_1 \leq r \leq R_2$.

Wyznaczone wyżej rozkłady pola termicznego oraz stałą czasową obliczono przy wykorzystaniu programu Mathematica 10.3 [13]. Jako przykład obliczeniowy wybrano przewód z miedzianą żyłą. Przyjęto następujące dane:

(31)

$$R_1 = 0.0117m, R_2 = 0.0141m, \lambda_2 = 0.17 W/(mK), c_2 = 1740 J/(kgK), \mu_2 = 1350 kg/m^3, \alpha = 14.12 W/(m^2K), T_0 = 25^\circ C, v = 45^\circ C, \tau_c = 1828 s.$$

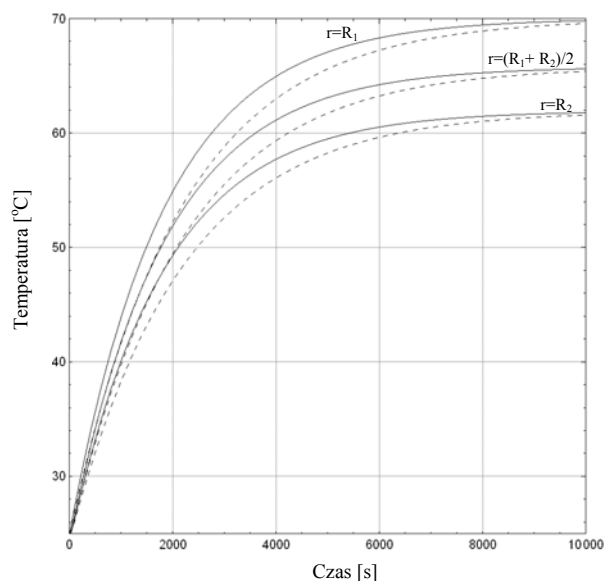
Szeregi występujące w (26), (30) okazały się szybkozbieżne. Przy sumowaniu więcej niż dwudziestu pięciu wyrazów, wyniki zmieniły się na czwartym miejscu po przecinku. W tej sytuacji sumowanie ograniczono do dwudziestu pięciu wyrazów.

Wyniki obliczeń przedstawiano w postaci graficznej. Na rys. 2 przedstawiono krzywe rozgrzewu w wybranych punktach izolacji przewodu. Za pomocą przerywanej linii zaznaczano krzywe dla przypadku zmiennej rezystywności żyły. Ciepna stała czasowa w przypadku zmiennej rezystywności wynosi $\tau_c = 2128 s$. Jej wartość określono na podstawie [1]. Z kolei na rys. 3 pokazano zależność stałej czasowej (30) od współrzędnej radialnej dla uśrednionej rezystywności. W przypadku uwzględnienia zmiennej rezystywności żyły, wykres stałej czasowej jest identycznego kształtu jak rys. 3, przesunięty jest tylko względem osi rzędnych w kierunku większych wartości.

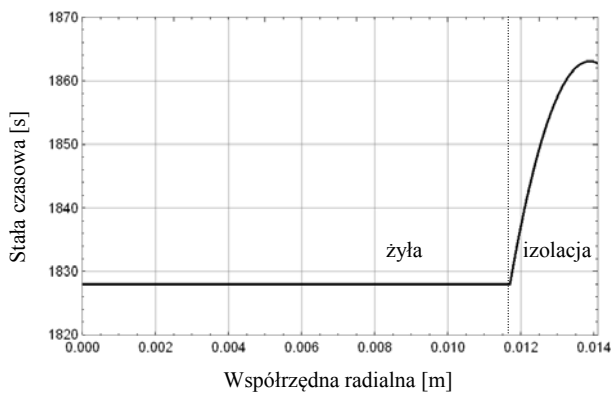
Dokonano również weryfikacji przedstawionej metody. W tym celu otrzymane wyniki porównano z obliczeniami wykonanymi numerycznie za pomocą programu Mathematica 10.3 [13]. Mianowicie metodą elementów skończonych [14] ponownie rozwiązano przeliczone na temperaturę zagadnienie (4)-(7). Następnie obliczono względne różnice rozkładów według wzoru

$$(32) \quad 100\% \frac{T_2(r, t) - T_{FE}(r, t)}{T_2(r, t)}, \text{ gdzie}$$

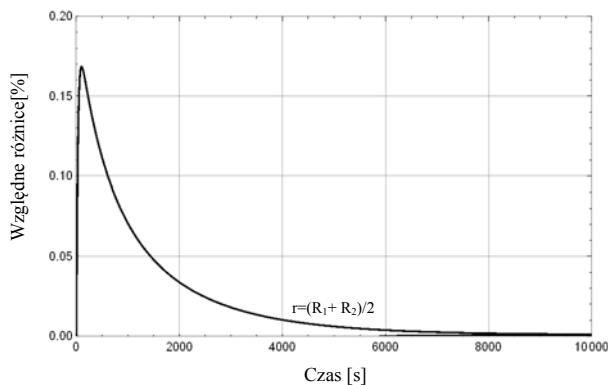
$T_2(r, t)$ - rozkład temperatury uzyskany metodą Greena, $T_{FE}(r, t)$ - rozkład temperatury obliczony metodą elementów skończonych. Na rys. 4 zilustrowano względne różnice (32) dla środka izolacji przewodu tzn. dla $r = (R_1 + R_2)/2$. W pozostałych punktach izolacji, różnice (32) są znacznie mniejsze.



Rys. 2. Krzywe rozgrzewu w wybranych punktach izolacji przewodu przy uśrednionej i zmiennej rezystywności (linia przerywana)



Rys. 3 Ciepłna stała czasowa w przewodzie w funkcji współrzędnej radialnej przy stałej (uśrednionej) rezystywności



Rys. 4 Względne różnice krzywych rozgrzewu w izolacji przewodu wyznaczonych metodą elementów skończonych i Greena dla $r=(R_1+R_2)/2$

Uwagi końcowe

- A) Z przedstawionych rozkładów pola termicznego w izolacji przewodu (rys. 2) wynika, że wraz ze wzrostem współrzędnej radialnej maleje wartość oraz prędkość narastania krzywych rozgrzewu. Zjawisko to potwierdza również wyraźny wzrost cieplnej stałej czasowej w izolacji (rys. 3). Fizyczną przyczyną powyższego zjawiska jest znaczny spadek prędkości propagacji ciepła w izolacji przy oddalaniu się od źródła ciepła (żyły). W przypadku uwzględnienia zmiennej rezystywności żyły (rys. 2) krzywe rozgrzewu w izolacji narastają wolniej, co wynika z większej wartości stałej czasowej żyły.
- B) Przyrost cieplnej stałej czasowej w izolacji tzn. $\tau[R_2]-\tau[R_1]=36\text{ s}$ nie zależy od stałej czasowej żyły. Wynika to ze wzoru (30), w którym pierwszy jego składnik określa stałą czasową żyły, drugi z kolei jest związany tylko z parametrami izolacji.

B) Względne różnice pomiędzy krzywymi rozgrzewu uzyskanymi metodą analityczną (Greena) a metodą elementów skończonych są bardzo małe i nie przekraczają 0.17% (rys. 4). Należy uznać, że obie metody analityczna i elementów skończonych prowadzą do takich samych wyników.

OŚWIADCZENIE

Niniejszy artykuł przygotowano w ramach projektu S/WE/2/18 realizowanego w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii Politechniki Białostockiej.

Autor: dr. inż. M. Zaręba, Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii, ul. Wiejska 45 D, 15-351 Białystok, e-mail: m.zareba@pb.edu.pl

LITERATURA

- [1] Gołębiowski J., Zaręba M., Analiza wpływu zmiennej rezystywności na pole termiczne szynoprzewodu cylindrycznego metodą funkcji Greena, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2017), nr. 10, 273-277.
- [2] Kulas S., Tory prądowe i układy zestykowe, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, Warszawa (2008).
- [3] Incropera F.P., Dewitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S., Introduction to heat transfer, *John Wiley & Sons*, New York (2007).
- [4] Gołębiowski J., Zaręba M., A method of the analysis of the thermal field dynamics in the core and insulation of a DC lead with convective heat abstraction, *Electrical Engineering-Archiv für Elektrotechnik*, 88 (2006), n. 5, 453-464.
- [5] Michalski J., Eckersdorf K., Pomiary temperatury, *WNT*, Warszawa (1986).
- [6] Gołębiowski J., Zaręba M., Method of analysis of asymmetrical thermal field in a double insulated wire, *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical Engineering*, 36 (2017), n. 4, 1075-1088.
- [7] Ozisik M.N., Heat Conduction, *John Wiley&Sons*, New York (1993).
- [8] Cole K.D., Haji-Sheikh A., Beck J.V., Litkouhi B., Heat conduction using Green's functions, *CRC Press* (2011).
- [9] Duffy D.G., Green's function with applications, *CRC Press*, (2015).
- [10] Greenberg M.D., Applications of Green's function in science and engineering, *Dover Publications*, USA (2015).
- [11] Lipiński W., Analiza dynamiki pola elektromagnetycznego w środowiskach przewodzących, *Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej*, Szczecin (1976).
- [12] Brykalski A., Badanie dynamiki procesów elektromagnetycznych i cieplnych w urządzeniach elektrycznych numerycznymi metodami analizy pól. *Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej*, Szczecin (1987).
- [13] Grzymkowski R., Kapusta A., Kumoszek T., Słota D., *Mathematica 6*, *Wydawnictwa Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego*, Gliwice (2008).
- [14] Brenner S., Scott R.L., The mathematical theory of finite element methods, *Springer*, Berlin (2008).