Maciej SIWCZYŃSKI Andrzej DRWAL

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki; Kraków ul. Warszawska 24

doi:10.15199/48.2017.06.19

Minimalizacja wahań napięcia źródła stratnego – rozwiązanie zagadnienia w dziedzinie czasu

Streszczenie: *W artykule opisano proces minimalizacji normy kwadratowej sygnału napięcia wewnątrz stratnego źródła energii elektrycznej używając do tego celu dziedziny czasowej zamiast częściej stosowanej dziedziny widmowej. Wyniki wyprowadzono za pomocą metod analizy funkcjonalnej, by w szczególnym przypadku przejść do sygnałów i operatorów okresowych opisujących stan ustalony źródła energii. Zwrócono uwagę na fakt, że podejście czasowe jest szczególnie przydatne w przypadkach szybkozmiennych sygnałów zajmujących stosunkowo szerokie pasmo częstotliwości.*

Abstract: *This article describes the process of minimize the squared norm of a voltage signal within a lossy electrical power source in the time domain instead of the often used spectral domain. The results obtained by functional analysis, in the particular case are transferred to the periodic signals and operators that describe the steady-state power source. It was noted that the time approach is particularly useful in cases of rapidly changing signals occupying a relatively wide frequency range. (**Minimizing the voltage fluctuations lossy source - solution to the problem in the time domain**)*

Słowa kluczowe: wahania napięcia, jakość energii, analiza w dziedzinie czasowej
Key words: voltage fluctuations, power quality, time domain analysys

Wprowadzenie

Wahania napięcia to zjawisko, które należy minimalizować z punktu widzenia jakości energii elektrycznej [9, 10, 13]. W opracowaniach związanych z jakością energii elektrycznej wykorzystuje się pojęcie mocy biernej, ale ma to sens tylko dla przebiegów sinusoidalnych [6, 7, 11]. Istotnym staje się więc przedstawienie tego zagadnienia w systemach niesinusoidalnych [2, 4, 5, 8, 12, 14]. W pracy [3] rozwiązano zagadnienie minimalizacji normy kwadratowej odchyłki okresowego zaciskowego źródła używając do tego celu dziedziny częstotliwościowej. Operowanie dyskretnymi widmami sygnałów jest skuteczne wówczas, gdy ich przebiegi nie odbiegają znacznie od harmonicznych. W przypadku sygnałów szybkozmiennych, na przykład impulsowych lepiej operować bezpośrednio w dziedzinie czasu. Ta właśnie kwestia przedstawiona jest w niniejszym artykule.

Operatory wymierne, czwórki operatorowe I ich reprezentacje czasowe.

W dziedzinie czasu operatory liniowe, czasowo niezmiennicze działają na sygnały okresowe w stanach ustalonych według splotu cyklicznego. Tej operacji muszą być podporządkowane formuły otrzymywania tzw. cyklicznych funkcji impulsowych z funkcji wymiernych zmiennej zespolonej opisujących odpowiednie transmitancje źródła. Przez cykliczną funkcję impulsową rozumie się nie odpowiedź układu na pojedynczy impuls Diraca, ale ustaloną odpowiedź układu na T-periodyczny obustronny „grzebień” tych impulsów. Relacja pomiędzy „pojedynczą” funkcją impulsową $h(t)$ a jej odpowiednikiem T-cyklicznym $\widetilde{h}(t)$ jest tzw. formułą „T-powielacza”:

$$\widetilde{h}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(t+pT) \tag{1}$$

Funkcja $\widetilde{h}(t)$ otrzymana w ten sposób jest T-okresowa I dlatego jest w pełni zadana w przedziale [0,T). Funkcja wymierna posiada rozkład elementarny

$$H(s) = \sum_{\alpha} \frac{a(\alpha)}{\alpha + s}; \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \tag{2}$$

Natomiast przejście z dziedziny zespolonej operatora przyczynowego do dziedziny czasowej ma postać izomorfizmu:

$$\frac{1}{\alpha + s} \leftrightarrow e^{-\alpha t}\mathbf{1}(t) \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{1}(t)$ jest sygnałem skoku jednostkowego. Operator sprzężony w s-dziedzinie i w t-dziedzinie otrzymuje się poprzez zamianę zmiennych niezależnych według schematu $s \xrightarrow{*} -s; \quad t \xrightarrow{*} -t$. Tak więc

$$\frac{1}{\alpha - s} \leftrightarrow e^{\alpha t}\mathbf{1}(-t) \tag{4}$$

Operator periodyczny sprzężony otrzymuje się według następującej reguły:

$$\widetilde{h}^{*}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(T - t + pT) = \widetilde{h}(T - t) \tag{5}$$

dla $t \in [0, T)$.

Zatem reguła periodycznego operatora ma postać:

$$\frac{t}{T} \xrightarrow{*} 1 - \frac{t}{T}; \text{ albo } \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \xrightarrow{*} -\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{t}{T} \in [0,1)$$

Stąd wynika homomorfizm funkcji wymiernych I funkcji okresowych

$$\frac{1}{\alpha + s} \to \sum_{p=0}^{\infty} e^{-\alpha(t+pT)} = \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} = \frac{e^{-\alpha T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\alpha\frac{T}{2}} \tag{7}$$

$$\frac{1}{\alpha - s} \to \frac{e^{\alpha T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\alpha\frac{T}{2}}; \quad \frac{t}{T} \in [0,1] \tag{8}$$

Czwórką hermitowską (samosprzężoną lub parzystą) nazywa się operator wymierny:

(9) $$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha+s}+\frac{a^*}{\alpha^*+s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha-s}+\frac{a^*}{\alpha^*-s}\right)$$

podczas gdy operator wymierny:

(10) $$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha+s}+\frac{a^*}{\alpha^*+s}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha-s}+\frac{a^*}{\alpha^*-s}\right)$$

nazywa się czwórką antyhermitowską (nieparzystą) gdzie $\mathrm{Re}\,\alpha>0,\quad \mathrm{Im}\,\alpha\geq 0$.

Dowolny operator wymierny i przyczynowy da się rozłożyć na sumę operatorów

(11) $$Z(s)=R(s)+X(s): \\ R(-s)=R(s),\ X(-s)=-X(s)$$

oznacza to, że:

(12) $$R(s)=\frac{1}{2}\left[Z(s)+Z(-s)\right] \\ X(s)=\frac{1}{2}\left[Z(s)-Z(-s)\right]$$

Jeżeli w szczególności operator *Z(s)* jest impedancją dwójnika elektrycznego, to *R(s)* jest jego składową czynną (operatorem stratności), *X(s)* – jest składową nieczynną. Tym samym operator przyczynowy wymierny jest sumą czwórek hermitowskich i antyhermitowskich. Odpowiadają im homomorficznie T-okresowe funkcje czasowe jako cykliczne odpowiedzi impulsowe:

(13) $$\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha+s}+\frac{a^*}{\alpha^*+s}\right)+ \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha-s}+\frac{a^*}{\alpha^*-s}\right)\end{matrix} \to \mathrm{Re}[a\frac{ch\alpha T\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)}{sh\alpha\frac{T}{2}}]$$

(14) $$\begin{matrix}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha+s}+\frac{a^*}{\alpha^*+s}\right)- \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\alpha-s}+\frac{a^*}{\alpha^*-s}\right)\end{matrix} \to \mathrm{Re}[a\frac{sh\alpha T\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{T}\right)}{sh\alpha\frac{T}{2}}]$$

Minimalizacja wahań napięcia źródła

W artykule [4] postawiono następujące zadanie minimalizacji kształtu napięcia zaciskowego rzeczywistego źródła napięcia:

(15) $$(\Delta u,\Delta u)\to MIN;\quad \Delta u=Zi$$

przy warunku energetycznym:

(16) $$(e,i)-(Ri,i)-P=0$$

gdzie:

$e(t)$ - T-okresowy sygnał napięcia źródłowego (siły elektromotorycznej); *u(t), i(t)* - odpowiednio sygnały zaciskowe źródła: napięcia i prądu; *Z* – linowy, czasowo niezmienniczy operator impedancji wewnętrznej źródła, działający według relacji splotu cyklicznego; $R=\frac{1}{2}\left[Z+Z^*\right]$ operator wewnętrznej stratności źródła, Z^* - operator sprzężony dla *Z*; P – moc czynna wydawana ze źródła do odbiornika; $(\cdot,\cdot)$ - symbol iloczynu skalarnego sygnałów, dla sygnałów T-okresowych *u(t), i(t)* definiowany w następujący sposób:

(17) $$(u,i)=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$$

W [6, 7] wykazano, że zadanie minimum (15), (16) rozwiązywane jest przez równanie operatorowe:

(18) $$(\lambda I+A)i=\frac{1}{2}YY^*e$$

gdzie:

$A=RYY,\quad Y=Z^{-1}$ jest samosprzężonym, dodatnio określonym operatorem, *I* – operator jednostkowy.

$\lambda=\frac{g}{x}\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)$ - „nieoznaczony" czynnik Lagrange'a,

$x=\frac{P}{P_{MAX}}$ - ułamek obciążenia źródła,

$P_{MAX}=\frac{1}{4}\left(R^{-1}e,e\right)$ - czynna moc maksymalna źródła,

$g=\frac{\left(YY^*e,e\right)}{(R^{-1}e,e)}$ - tzw. kondunktancja normatywna.

Z równania (18) otrzymuje się konkretny egzemplarz sygnału prądu, który spełnia bilans mocy źródła (16) i nazywany jest prądem optymalnym:

(19) $$i^{opt}=\frac{1}{2}YY^*\left(\lambda I+A\right)^{-1}e=Ge$$

Operatory występujące w wyrażeniu (19) mają rozkłady na czwórki hermitowskie. Operator rozwiązujący, który występuje w wyrażeniu (19) przyjmuje następującą postać parzystej funkcji zmiennej zespolonej:

(20) $$G(s)=\frac{1}{2}\left[YY^*\left(\lambda 1+A\right)^{-1}\right](s)= \\ \frac{1}{Z(s)+2\lambda Z(s)Z(-s)+Z(-s)}$$

W dziedzinie czasowej operator (19) realizowany jest przez splot cykliczny:

(21) $$i^{opt}(t)=\int_0^t \bar{g}(t-t')e(t')dt'+\int_0^T \bar{g}(t-t'+T)e(t')dt'$$

Przykład

Niech *e(t)* będzie funkcją T-okresową określoną w następujący sposób:

$$e(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}e_T(t+pT)$$

gdzie:

$$e_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\upsilon} e^{-\frac{1}{\upsilon}} & t \in [0,T) \\ 0 & t \notin [0,T) \end{cases}$$

$\upsilon << T$ - warunek dostatecznie dużej szybkości zanikania impulsu SEM;
a impedancją wewnętrzną będzie operator układu *r,L*: $Z(s) = r + sL$. Wówczas na mocy (20):

$$G(s) = \frac{1}{2r + \lambda(r^2 - (sL)^2)} = \frac{1}{2r} \frac{1}{\lambda r \tau^2} \frac{1}{\alpha^2 - s^2} =$$

$$\frac{1}{4r\alpha\lambda r\tau^2}\left(\frac{1}{\alpha + s} + \frac{1}{\alpha - s}\right)$$

gdzie:

$\alpha = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1+\lambda r}{\lambda r}}$; $\tau = \frac{L}{r}$ - stała czasowa obwodu *r,L*

Stąd, na mocy odpowiedniości (13) otrzymuje się T-okresową czasową postać operatora *G(s)*:

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{4(\lambda r)(\alpha\tau)} \frac{1}{r\tau} \frac{ch\alpha T\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)}{sh\alpha T\left(\frac{T}{2}\right)}$$

$$\alpha T = \frac{T}{\tau}\sqrt{\frac{1+\lambda r}{\lambda r}} ; \frac{t}{T} \in [0,1)$$

Kondunktancję normatywną określa tym razem wzór

$$g = \frac{(YY^* e, e)}{r^{-1}(e,e)}$$

Poszczególne czynniki ilorazu można w przybliżeniu wyznaczyć za pomocą całek po konturze obejmującym lewą półpłaszczyznę [1]:

$$(YY^* e, e) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(s)Y(-s)E(s)E(-s)ds =$$

$$= \frac{r^{-2}}{(1+s\tau)(1-s\tau)(1+s\upsilon)(1-s\upsilon)} \frac{(1+s\upsilon)}{\upsilon}\Bigg|_{s \to -\frac{1}{\upsilon}}$$

$$= \frac{r^{-2}}{2(\tau + \upsilon)}$$

oraz

$$(e,e) = \frac{1}{2\pi j}\oint E(s)E(-s)ds =$$

$$\frac{1}{(1+s\upsilon)(1-s\upsilon)} \frac{(1+s\upsilon)}{\upsilon}\Bigg|_{s \to -\frac{1}{\upsilon}} = \frac{1}{2\upsilon}$$

stąd:

$$gr = \frac{\upsilon}{\tau + \upsilon} ;$$

oraz:

$$\lambda r = \frac{gr}{x}\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right) = \frac{\upsilon}{\tau+\upsilon} \frac{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{x}$$

Wnioski

Niniejsza praca nawiązuje do zagadnienia minimalizacji normy sygnału spadku napięcia źródła rzeczywistego. Zadanie to rozwiązano z zastosowaniem dziedziny czasowej. Podejście takie jest skuteczne dla szybkozmiennych okresowych sygnałów napięć i prądów źródła. Przykład zamieszczony na zakończenie artykułu powinien dobrze ilustrować metodę ogólną. Dotyczy on źródła o dość typowej impedancji wewnętrznej typu RL z prawie impulsowym okresowym napięciem siły elektromotorycznej.

Autorzy*: prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, dr inż. Andrzej Drwal, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Kraków ul. Warszawska 24, E-mails: e-3@pk.edu.pl; adrwal@pk.edu.pl; szaba@pk.edu.pl*

LITERATURA

[1] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Minimalno – energetyczny rozkład sygnałów sinusoidalnych w obwodach elektrycznych, *Wiadomości Elektrotechniczne* , 9 (2014), 22-25
[2] M. Siwczyński, M. Jaraczewski: Zasada podobieństwa w równaniach optymalizacyjnych teorii mocy i energii. Przegląd Elektrotechniczny 2010 nr 11a.
[3] M. Siwczyński, S. Żaba: Minimalizacja wahań napięcia źródła energii z uwzględnieniem strat wewnętrznych. Przegląd Elektrotechniczny, (w przygotowaniu)
[4] M. Siwczyński: O współzależności między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku niesinusoidalnych okresowych przebiegów napięcia I prądu. Przegląd Elektrotechniczny 6/2011, str. 169-173.
[5] M. Siwczyński: Moc bierna w układach zasilanych impulsowo. Przegląd Elektrotechniczny 8/2011, str. 121-127.
[6] M. Siwczyński, K. Hawron: Związek między mocą bierną a wrażliwością napięcia bezstratnego źródła w dziedzinie częstotliwości. Przegląd Elektrotechniczny nr 11/2014 str. 216-219
[7] M. Siwczyński, K. Hawron: Optymalizacyjne zadania teorii mocy-przegląd algorytmów. Przegląd Elektrotechniczny (w przygotowaniu)
[8] J. Walczak, M. Pasko: The Minimization of losses of active power and the symmetrization of power flow in the nonsinusoidal systems, *Jakość I użytkowanie Energii Elektrycznej*, 5 (1999), nr 1, 55-59
[9] M. Pasko, M. Maciążek, D. Buła, Metody poprawy jakości energii elektrycznej - kształtowanie prądu źródła, Wiadomości Elektrotechniczne R.75, 2007, nr 8, 17-25
[10] M. Pasko, A. Lange, Wpływ pracy pieców łukowych i indukcyjnych na jakość energii elektrycznej i możliwości jej poprawy, Przegląd Elektrotechniczny, R.85, nr 6, 2009, 67-70
[11] L. S. Czarnecki, Teorie mocy i metateoria mocy obwodów elektrycznych, Przegląd Elektrotechniczny, R.87, 2011, 198-201
[12] L. S. Czarnecki, Discussion on 'a Uniform Concept of Reactive Power of Nonsinusoidal Currents in a TimeDomain, Przegląd Elektrotechniczny, R.85 nr 6, 2009, 164-166 (in Polish)
[13] M. Mróz , Z. Hanzelka , K. Chmielowiec Wahania napięć w sieciach z rozproszonymi źródłami energii, Przegląd Elektrotechniczny, R.90, nr 5, 2014, 222-228
[14] P. Rens: Validation of popular nonsinusoidal power theories for the analysis and management of modern power systems. *North-West University*, Potchefstroom Campus, 2006.