

Niejednoznaczności wyznaczania ułamkowej potęgi wektora wirującego

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem niejednoznaczności wyznaczania pochodnych ułamkowego rzędu wektora wirującego. Jest to związane z określeniem ułamkowej potęgi liczby zespolonej.

Abstract. The paper presents problems of ambiguity of calculation of fractional derivatives for the rotating vector. This is related to the determining of fractional power of the imaginary number. (**Ambiguity of calculation of fractional derivatives for the rotating vector**).

Słowa kluczowe: pochodna ułamkowego rzędu, wektor wirujący, funkcja hipergeometryczna, niepełna funkcja hipergeometryczna.
Keywords: fractional derivatives, rotating vector, hypergeometric function, confluent hypergeometric function.

Wstęp

Układy dynamiczne niecałkowitego rzędu wyróżniają się tym, że zachodzące w nich procesy (zjawiska) lepiej można opisać za pomocą pochodnych lub całek dowolnego, niecałkowitego rzędu [1, 2]. Klasyczne podejście do analizy i modelowania układów fizycznych zwykle zakłada idealność elementów i zjawisk występujących w tych układach, co prowadzi do modeli matematycznych opartych o równania różniczkowe całkowitych rzędów. Weryfikacja eksperymentalna takich modeli prowadzi do mniejszych czy większych rozbieżności. Dopiero zastosowanie pochodnych ułamkowego rzędu pozwala na „skompensowanie” pominiętych zjawisk w rozpatrywanym obiekcie i pozwala uzyskać dokładniejsze modele matematyczne. Pochodne niecałkowitego rzędu zwane też różniczkowo-całkami są ciekawym uogólnieniem dobrze znanych układów dynamicznych dotąd opisywanych za pomocą „klasycznych” równań różniczkowych zawierających pochodne całkowitego rzędu. Dotyczy to również obwodów elektrycznych, w których zakłada się, że istnieją hipotetyczne elementy quasi-pojemnościowe – np.: superkondensatory [3-5], quasi-indukcyjne [6] a związki pomiędzy prądami i napięciami lub napięciami i prądami określone są pochodną niecałkowitego rzędu. Najczęściej spotykane przebiegi wielkości elektrycznych stanowią szczególne przypadki sygnału o charakterze wykładniczym. Ponieważ funkcja wykładnicza pełni wyjątkową rolę (każdy sygnał występujący w praktyce może być wyrażony w postaci sumy funkcji wykładniczych) interesującym byłoby określenie odpowiedzi takich elementów na wymuszenie wykładnicze. A zatem, dla przypadku gdy rozpatrywany sygnał (przedstawiony na płaszczyźnie zespolonej za pomocą wektora wirującego) dany jest funkcją $f(t) = U e^{j\omega t}$ należy obliczyć:

$$(1) \quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} U \cdot e^{j\omega t}$$

Przypadki gdy sygnał wymuszający jest skokiem jednostkowym oraz sygnałem sinusoidalny były rozpatrywane w pracach [4, 7, 8].

Obliczanie pochodnych ułamkowych

Wykorzystując definicję Riemanna–Liouville’a (R-L) [1, 2] otrzymuje się dla $f(t) = U e^{j\omega t}$ oraz $k = 1$ pochodną ułamkową rzędu $0 < \alpha < 1$ w postaci:

$$(2) \quad {}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{U}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{e^{j\omega\tau}}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

Obliczając pochodną (3) otrzymujemy:

$$(3) \quad {}_0 D_t^\alpha f(t) = U t^{-\alpha} \left[-\frac{j\alpha}{\omega t \cdot \Gamma(1-\alpha)} \right] + U t^{-\alpha} \left[(j\omega t)^\alpha e^{j\omega t} \left(1 - \alpha(1+\alpha) \frac{\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)}{\Gamma(1-\alpha)} \right) \right]$$

W związku (3) wyrażenie $\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)$ jest postaci $\Gamma(\mu, x)$ definiowanej następująco [9]:

$$(4a) \quad \Gamma(\mu, x) = \int_0^\infty e^{-y} t^{\mu-1} dt$$

oraz:

$$(4b) \quad \gamma(\mu, x) = \int_0^x e^{-y} t^{\mu-1} dt$$

gdzie: $\Gamma(\mu, x)$ i $\gamma(\mu, x)$ to niekompletna funkcja gamma dla której w oczywisty sposób zachodzi:

$$(5) \quad \Gamma(\mu, x) + \gamma(\mu, x) = \Gamma(\mu) \text{ oraz: } \Gamma(\mu, 0) = \Gamma(\mu)$$

Interesującą nas funkcję $\gamma(\mu, x)$ można przedstawić przy pomocy funkcji hipergeometrycznych [9]:

$$(6) \quad \gamma(\mu, x) = \mu^{-1} x^\mu {}_1 F_1(\mu, \mu+1, -x)$$

gdzie: ${}_1 F_1(\alpha, \gamma, x)$ jest zdegenerowaną funkcją hipergeometryczną definiowaną jako [9]:

$$(7) \quad {}_1 F_1(\alpha, \gamma, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} x^k$$

gdzie: $(\alpha)_k$ jest symbolem Pochhammera i wyraża się wzorem:

$$(8) \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) \text{ dla } (a)_0 = 1$$

Dla $k = 2$, pochodna ułamkowa (R-L) rzędu $1 < \alpha < 2$, uzyskuje postać:

$$(10) \quad {}_0D_t^\alpha f(t) = t^{-\alpha} (j\omega t)^\alpha \alpha \cdot e^{j\omega t} + \frac{j\alpha t^{-1-\alpha} (\alpha-1)}{\omega \Gamma(2-\alpha)} + \\ + t^{-\alpha} (j\omega t)^\alpha \alpha \cdot e^{j\omega t} (\alpha^2 - 1) \frac{\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)}{\Gamma(2-\alpha)}$$

Podobnie jak dla pochodnej (R-L) obliczając pochodną ułamkową stosując definicję Caputo [1, 2] dla $n = 1$ oraz przyjmując za $f(t) = U e^{j\omega t}$ otrzymujemy:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha) j U t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha-1) \Gamma(2-\alpha)} \cdot \left\{ \frac{(\alpha-1)(j\omega t - \alpha)}{\omega t} - j(j\omega t)^\alpha e^{j\omega t} [1 + \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)] \right\}$$

Dla $n = 2$ mamy:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{-j\omega^2 U (\alpha-2)}{\Gamma(\alpha-2) \omega^3 t^3} \Gamma(2-\alpha) \cdot t^{2-\alpha} \cdot \left\{ \frac{(\alpha^2 - j\alpha\omega t - \omega^2 t^2 - \alpha + j\omega t)}{\Gamma(3-\alpha)} + (\alpha-1) \cdot (j\omega t)^{\alpha+1} \cdot \right. \\ \left. \cdot e^{j\omega t} \left[\frac{1}{(2-\alpha) \cdot (1-\alpha)} - \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(-1-\alpha, j\omega t)}{\Gamma(3-\alpha)} \right] \right\}$$

Jak widać we wszystkich wzorach występuje czynnik $j^{\alpha'}$ gdzie α' jest liczbą niecałkowitą, dającą się przedstawić jako sumę liczby całkowitej n i ułamkowej α ($\alpha' = n + \alpha$).

Niejednoznaczność wyznaczania ułamkowej potęgi j^α

Niech liczba ułamkowa α da się przedstawić w postaci ułamka zwykłego: l/m , gdzie: $m, l \in N$ i $m > l$, to:

$$(11) \quad j^\alpha = j^{l/m} = \left(\sqrt[m]{j} \right)^l$$

Jak wiadomo, istnieje m pierwiastków z liczby zespolonej z : $\sqrt[m]{z}$, zgodnie ze wzorami Moivre'a [10]:

$$(12) \quad \sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|} \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \sqrt[m]{|z|} \cdot (\cos \Theta_k + j \sin \Theta_k)$$

$$\text{gdzie: } \Theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

co dla liczby j daje:

$$(13) \quad \sqrt[m]{j} = \sqrt[m]{\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}} = (\cos \Theta_k + j \sin \Theta_k)$$

$$\text{gdzie: } \Theta_k = \frac{(4k+1) \cdot \pi}{2m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

Wyrażając argument Θ_k w stopniach otrzyma się:

$$(14) \quad \Theta_k = (4k+1) \frac{90^\circ}{m}$$

Jako przykład obliczony zostanie pierwiastek drugiego stopnia z j . Wynosi on:

$$\sqrt{j} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ + j \sin 45^\circ = 0.70711 + j0.70711$$

lub, może wynosić:

$$\sqrt{j} = \cos \frac{5\pi}{2} + j \sin \frac{5\pi}{2} = \cos 225^\circ + j \sin 225^\circ = \\ = -0.70711 - j0.70711$$

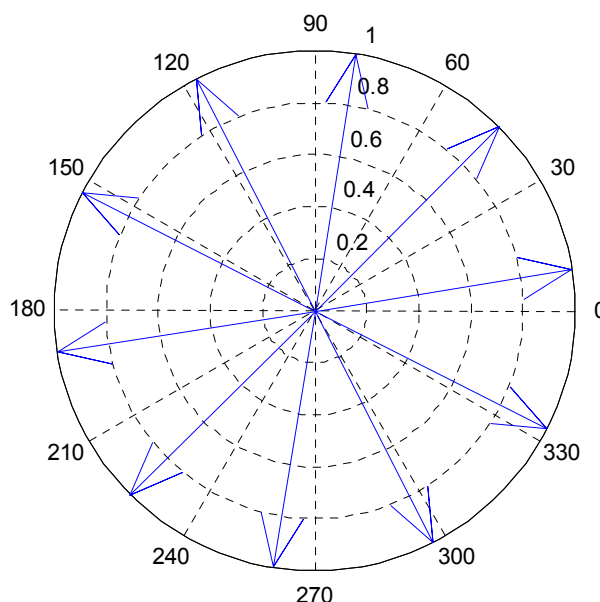
Natomiast dla:

$$(15) \quad j^{0.9} = j^{9/10} = \left(\sqrt[10]{j} \right)^9$$

odejmując parzyste wielokrotności π i porządkując otrzymano:

$$(16) \quad j^{0.9} = \cos 9^\circ + j \sin 9^\circ = 0.98769 + j0.15643 \\ = \cos 45^\circ + j \sin 45^\circ = 0.70711 + j0.70711 \\ = \cos 81^\circ + j \sin 81^\circ = 0.15643 + j0.98769 \\ = \cos 117^\circ + j \sin 117^\circ = -0.45399 + j0.89101 \\ = \cos 153^\circ + j \sin 153^\circ = -0.89101 + j0.45399 \\ = \cos 189^\circ + j \sin 189^\circ = -0.98769 - j0.15643 \\ = \cos 225^\circ + j \sin 225^\circ = -0.70711 - j0.70711 \\ = \cos 261^\circ + j \sin 261^\circ = -0.15643 - j0.98769 \\ = \cos 297^\circ + j \sin 297^\circ = 0.45399 - j0.89101 \\ = \cos 333^\circ + j \sin 333^\circ = 0.89101 - j0.45399$$

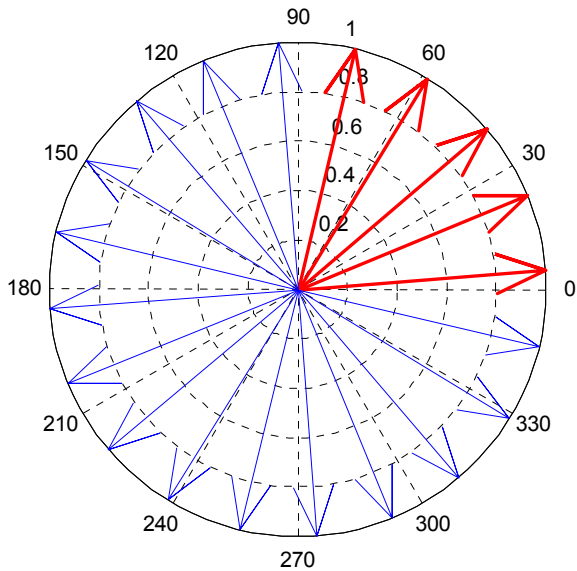
Przedstawiając otrzymane wartości w formie graficznej otrzymujemy wykres pokazany na rys. 1.



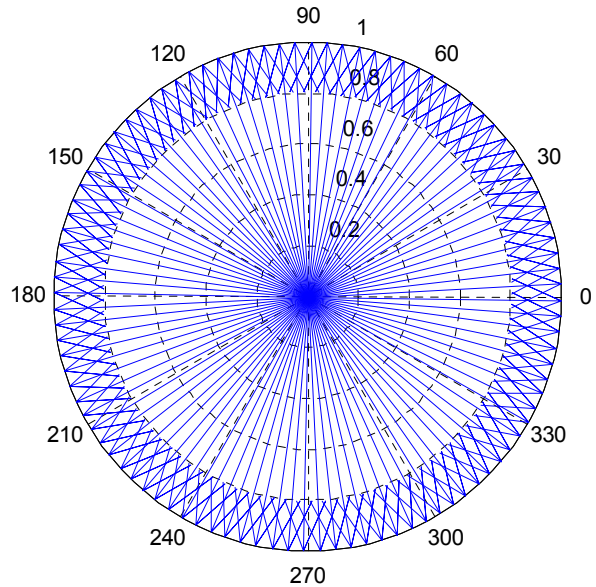
Rys.1. Interpretacja graficzna $j^{0.9}$.

W klasycznej teorii obwodów (czworniki, linia długa zawierające elementy R, L, C, M) występują pierwiastki drugiego stopnia z liczb zespolonych, ale ponieważ przedstawiają impedancję, to nie ma problemu z wyborem właściwej wartości pierwiastka; część rzeczywista musi być dodatnia, bo przedstawia rezystancję (12). W przypadku pochodnych ułamkowego rzędu, powyższe kryterium się nie sprawdza; np.: dla $\alpha = 0.9$ spośród 10 pierwiastków, 5 ma dodatnie części rzeczywiste (16). W ogólnym wypadku połowa z liczby wszystkich pierwiastków spełnia to kryterium (dla $\alpha = l/m$ daje to $m/2$ pierwiastków).

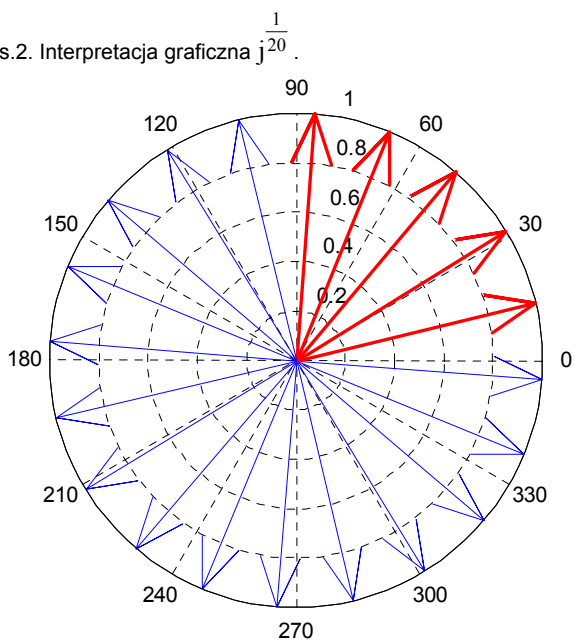
Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono wykresy otrzymane odpowiednio dla pierwiastków $1/20$ oraz $7/20$, gdzie wyróżniono rozwiązania w pierwszej ćwiartce układu Gaussa.



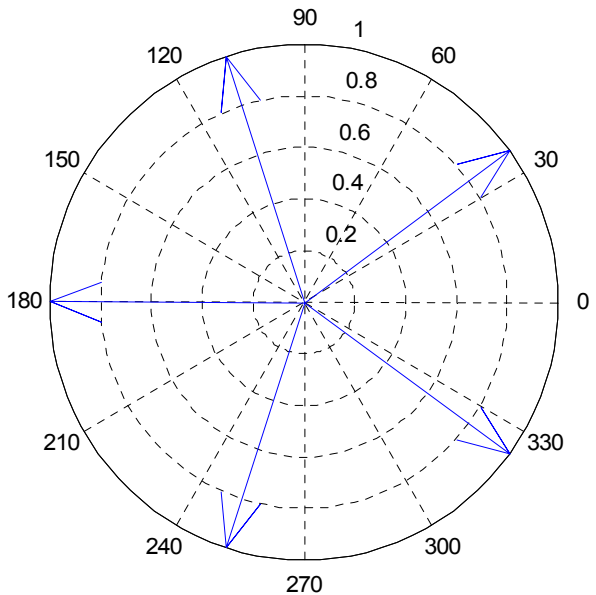
Rys.2. Interpretacja graficzna $j^{1/20}$.



Rys.4. Interpretacja graficzna $j^{99/100}$.



Rys.3. Interpretacja graficzna $j^{7/20}$.



Rys.5. Interpretacja graficzna $j^{2/5}$.

Okazuje się więc, że istnieje problem z wyborem właściwej wartości pierwiastka, bo np. dla $\alpha = 0.99$ jest ich 100 jak pokazuje rys.4.

Ze wzorów Moivre'a (12) wynika, że liczba pierwiastków (dla $\alpha = l/m$) jest równa liczbie m .

Załóżmy że, ten sam ułamek α przedstawia się jako $\alpha = l/m$ i $\alpha = 2l/2m$. Pobieżna analiza wskazuje, że w pierwszym wypadku jest m pierwiastków a w drugim $2m$. Przedstawmy to na przykładzie: $\alpha = 2/5$ i $\alpha = 4/10$.

Dla $\alpha = 2/5$ argumenty pierwiastków w stopniach (po odjęciu wielokrotności kąta pełnego) wynoszą

$$(17) \Theta_k = \{36^\circ, 180^\circ, 324^\circ, 108^\circ, 252^\circ\} \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

Ich rozmieszczenie przedstawia rys 5.

Natomiast dla $\alpha = 4/10$ otrzymujemy:

$$(18) \Theta_k = \{36^\circ, 180^\circ, 324^\circ, 108^\circ, 252^\circ, 36^\circ, 180^\circ, 324^\circ, 108^\circ, 252^\circ\}, \quad k = 0, 1, \dots, 9$$

Jak widać sekwencja kątów dla $\alpha = 2/5$ powtarza się dwukrotnie (dla $\alpha = 4/10$) – co praktycznie daje taką samą liczbę pierwiastków.

Zatem, można sformułować następujący wniosek: dla $\alpha = l/m$ oraz $\alpha = n \cdot l/n \cdot m, n \in \mathbb{N}$ otrzyma się zawsze taką samą liczbę pierwiastków tzn.: m . Z powyższego, wynika praktyczna wskazówka, że mając konkretny ułamek nie ma konieczności sprowadzania go do formy nieskracalnej, ponieważ i tak nie zmieni się liczba pierwiastków.

Innym problemem jest występowanie w wykładniku wektora wirującego liczby $1+\alpha = 1+l/m$, którą da się przedstawić jako ułamek niewłaściwy $1+\alpha = (l+m)/m$.

Można tu postawić pytanie: czy to samo rozwiązanie otrzyma się z wyrażenia:

$$(19) j^{1+\alpha} = j \left(\sqrt[m]{j} \right)^l = e^{j90^\circ} \left(\sqrt[m]{j} \right)^l$$

jak i:

$$(20) \quad j^{1+\alpha} = \left(\sqrt[m]{j}\right)^{l+m}.$$

Prześledźmy to na przykładzie, gdzie:

1) $1 + \alpha = 1 + 2/5$;

2) $1 + \alpha = 7/5$.

Ad 1) Argumenty pierwiastków otrzymuje się z argumentów dla $\alpha = 2/5$ (18) mnożąc przez j tzn. dodając do każdego 90° :

$$(21) \quad \Theta_k = \{36^\circ + 90^\circ, 180^\circ + 90^\circ, 324^\circ + 90^\circ, 108^\circ + 90^\circ, 252^\circ + 90^\circ\} \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

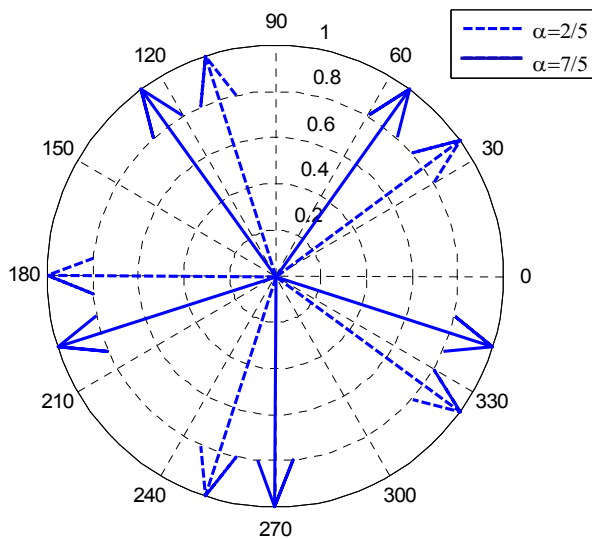
co daje:

$$(22) \quad \Theta_k = \{126^\circ, 270^\circ, 54^\circ, 198^\circ, 342^\circ\}$$

Ad 2) Argumenty pierwiastków otrzymuje się bezpośrednio z wzorów Moivre'a dla $\alpha = 7/5$

$$(23) \quad \Theta_k = \{126^\circ, 270^\circ, 54^\circ, 198^\circ, 342^\circ\} \quad k = 0, 1, \dots, 4$$

Otrzymane wyniki są identyczne – przedstawiono je na rys. 6.



Rys.6. Interpretacja graficzna $j^{2/5}$ oraz $j^{7/5}$.

Podsumowanie

Stosując do obliczenia ułamkowej potęgi wektora wirującego wzory Moivre'a otrzymuje się wiele rozwiązań. Liczba ich jest równa mianownikowi ułamka w wykładniku, po sprowadzeniu go do formy nieskracalnej.

Dotyczy to także ułamków niewłaściwych (zawierających części całkowite). Znane programy obliczeniowe podają zwykle pierwsze rozwiązanie, jednak dalej pozostaje sprawą otwartą, czym kierować się przy wyborze rozwiązania. Czy uwzględniać wszystkie rozwiązania, czy w oparciu o wybrane kryterium uwzględniać tylko jedno.

Autorzy dr hab. inż. Maciej Włodarczyk prof. PŚk, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Informatyki, Elektroniki i Elektrotechniki, Al. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, Poland, E-mail: m.wlodarczyk@tu.kielce.pl

dr inż. Andrzej Zawadzki, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Elektrotechniki Przemysłowej i Automatyki AI. Tysiąclecia P. P. 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl

LITERATURA

- [1] Podlubny I.: Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999)
- [2] Kaczorek T.: Selected problems of fractional systems theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (2011)
- [3] Dzieliński A., Sierociuk D.: Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model. Acta Montanistica Slovakia, (2006), vol. 13. no. 1, 136-145
- [4] Włodarczyk M., Zawadzki A.: Connecting a Capacitor to Direct Voltage in Aspect of Fractional Degree Derivatives. Przegląd Elektrotechniczny, 85 (2009), nr 10, 120 – 123
- [5] Zawadzki A., Włodarczyk M., Modelowanie procesów ładowania i rozładowania superkondensatora. Pomiar Automatyka Kontrola, 56, (2010) Zeszyt: 12, 1413-1415
- [6] Zawadzki A., Włodarczyk M., Modelowanie strat rzeczywistego elementu indukcyjnego układem ułamkowego rzędu, IC-SPE TO (2016), 53-54
- [7] Zawadzki A. Zastosowanie pochodnych niecałkowitego rzędu do modelowania stanów przejściowych w obwodach elektrycznych zawierających indukcyjność. Przegląd Elektrotechniczny, 89 (2013), nr 4, 92-94
- [8] Włodarczyk M., Zawadzki A. The application of hypergeometric functions to computing fractional order derivatives of sinusoidal functions. Bull. Pol. Ac.: Technical sciences, 64 (1), (2016), 243-248.
- [9] Abramowitz M. and Stegun I.A.. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards. Applied Math. Series #55. Dover Publications, (1965)
- [10] Leja F., Funkcje zespolone, PWN, Warszawa (1979)