

Twierdzenie o zespolonej mocy wymiany źródeł energii i o mocach otwarciowo-zwarciovych

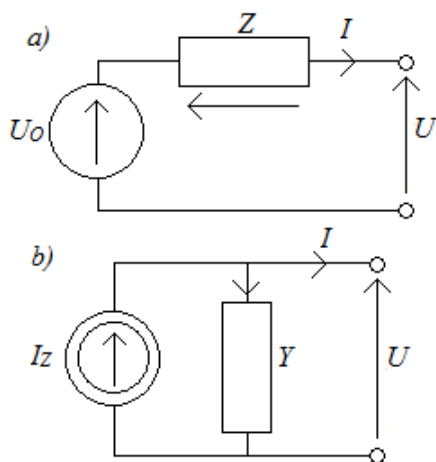
Streszczenie. W artykule wykazano, że zespolona moc wymiany energetycznej między dwoma źródłami jest funkcją czterech zespolonych tzw. mocy otwarciowo-zwarciovych układu źródeł połączonych. Wynik ten jest przedmiotem odpowiedniego twierdzenia nieznanego dotąd w teorii obwodów elektrycznych.

Abstract. The article shows that the complex power of energy exchange between the two sources is a function of the four so-called open-closed-circuit complex powers for the connected sources. This result is the subject of the previously unknown appropriate theorems in the theory of electrical circuits. (**Theorem of the energy sources complex power exchange and of the open-closed-circuit powers**)

Słowa kluczowe: źródła energii, wymiana energii, funkcje energetyczne
Keywords: energy sources, energy exchange, energy functions

Parametry i równania źródła energii elektrycznej

Na rysunku 1 pokazano dwie wersje tego samego źródła energii elektrycznej: wersję napięciową (rys. 1a) i wersję prądową (rys. 1b), napięcia i prądu sinusoidalnie zmiennego.



Rys. 1. Wersja napięciowa (a) i wersja prądowa (b) źródła energii elektrycznej o sinusoidalnych przebiegach sygnałów napięć i prądów

Zespolonymi parametrami źródła energii są:

- U_o - napięcie otwarciowe ($I = 0$),
- I_z - prąd zwarciovych ($U = 0$),
- Z, Y - immitancja wewnętrzna ($Z = Y^{-1}$)
- $U_o I_z^*$ - zespolona moc otwarciowo-zwarciova (gwiazdka - sprzężenie zespolone).

Równania źródła w wersjach:

- napięciowej:

$$U + ZI = U_o,$$

$$0 + ZI_z = U_o \text{ (otwarciowe),}$$

$$Z = \frac{U_o}{I_z},$$

- prądowej:

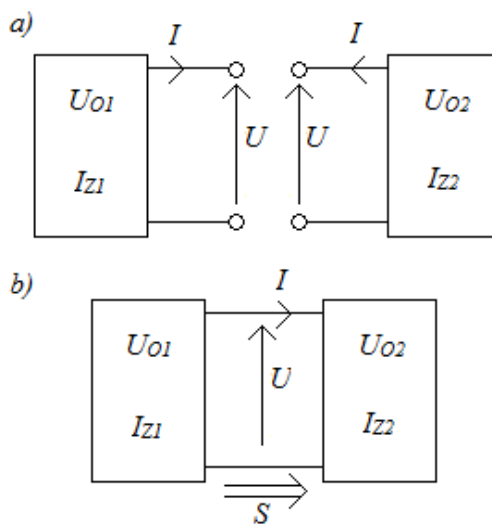
$$I + YU = I_z,$$

$$0 + YU_o = I_z \text{ (zwarcie),}$$

$$Y = \frac{I_z}{U_o}.$$

Połączenie dwóch źródeł - zespolona moc wymiany

Na rysunku 2 pokazano dwa zespolone źródła energii: niepołączone (a) i połączone (b) z zaznaczonym strumieniem zespolonej mocy wymiany S .



Rys. 2. Dwa zespolone źródła energii elektrycznej: niepołączone (a), połączone (b) z zaznaczoną zespoloną mocą wymiany S

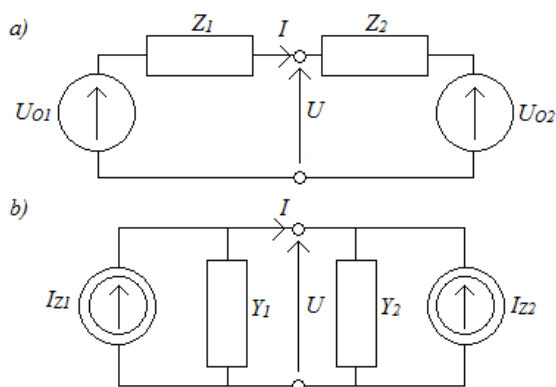
Definiuje się macierz zespolonych mocy otwarciowo-zwarciovych:

$$(1) \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{o1} I_{z1}^* & U_{o1} I_{z2}^* \\ U_{o2} I_{z1}^* & U_{o2} I_{z2}^* \end{bmatrix}.$$

Zachodzi równość:

$$(2) S_{11} S_{22} = S_{12} S_{21}.$$

Schematy zastępcze połączenia źródeł w wersjach: napięciowej (a) i prądowej (b) pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Schematy zastępcze połączenia źródeł w wersjach: napięciowej (a) i prądowej (b)

Twierdzenie o zespolonej mocy wymiany

Zespoloną moc wymiany między źródłami określa wzór:

$$S = \frac{S_{11}^* + S_{12}^* - S_{21}^* - S_{22}^*}{\frac{S_{11}^*}{S_{11}} + \frac{S_{22}^*}{S_{22}} + \frac{S_{12}^*}{S_{21}} + \frac{S_{21}^*}{S_{12}}} =$$

$$(3) \quad = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}] \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{21} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{WS}$$

gdzie:

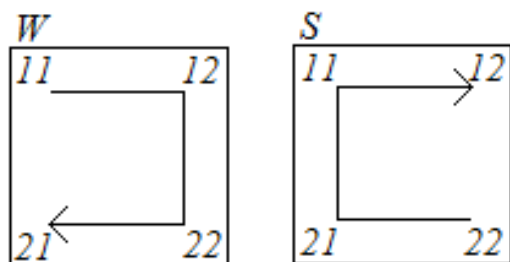
macierz rzeczywistych wag $[W_{ij}]$ określona jest następująco:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2R_{12}} \begin{bmatrix} |S_{11}|^2 & |S_{12}|^2 \\ -|S_{21}|^2 & -|S_{22}|^2 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$(5) \quad R_{12} = \frac{1}{2}(S_{11}S_{22}^* + S_{11}^*S_{22})$$

Wektory \mathbf{W} , \mathbf{S} we wzorze (3) można łatwo wyznaczyć za pomocą schematów „rotacyjnych” przedstawionych na rysunku 4.



Rys. 4. Schematy rotacyjne do wyznaczania wektorów \mathbf{W} , \mathbf{S} we wzorze (3)

Dowód:

Z analizy schematów zastępczych połączenia źródeł pokazanych na rysunku 3 wyznacza się zespolone: prąd i napięcie na zaciskach układu:

$$I = \frac{U_{o1} - U_{o2}}{Z_1 + Z_2}, \quad U = \frac{I Z_1 + I Z_2}{Y_1 + Y_2}$$

Stąd wynika zespolona moc wymiany:

$$\begin{aligned} S &= UI^* = \frac{(U_{o1}^* - U_{o2}^*)(I Z_1 + I Z_2)}{(Y_1 + Y_2)(Z_1^* + Z_2^*)} = \\ &= \frac{S_{11}^* - S_{22}^* + S_{12}^* - S_{21}^*}{Y_1 Z_1^* + Y_2 Z_2^* + Y_1 Z_2^* + Y_2 Z_1^*} = \\ (6) \quad &= \frac{S_{11}^* + S_{12}^* - S_{21}^* - S_{22}^*}{\frac{I_{Z1} U_{o1}^*}{U_{o1} I_{Z1}^*} + \frac{I_{Z2} U_{o2}^*}{U_{o2} I_{Z2}^*} + \frac{I_{Z1} U_{o2}^*}{U_{o1} I_{Z2}^*} + \frac{I_{Z2} U_{o1}^*}{U_{o2} I_{Z1}^*}} = \\ &= \frac{S_{11}^* + S_{12}^* - S_{21}^* - S_{22}^*}{\frac{S_{11}^*}{S_{11}} + \frac{S_{22}^*}{S_{22}} + \frac{S_{12}^*}{S_{21}} + \frac{S_{21}^*}{S_{12}}} \end{aligned}$$

Dalsze przekształcenia wyrażenia (6) przy uwzględnieniu równości (2) dają następujący wynik:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(S_{11}^* - S_{22}^*) + (S_{12}^* - S_{21}^*)}{\frac{S_{11}^* S_{22}^* + S_{11} S_{22}^*}{S_{12} S_{21}} + \frac{|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2}{S_{12} S_{21}}} = \\ &= \frac{(S_{11}^* - S_{22}^*) S_{11} S_{22} + (S_{12}^* - S_{21}^*) S_{12} S_{21}}{|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{S_{11} S_{22}^*\}} = \\ &= \frac{|S_{11}|^2 S_{22} + |S_{12}|^2 S_{21} - |S_{22}|^2 S_{11} - |S_{21}|^2 S_{12}}{|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{S_{11} S_{22}^*\}} = \\ &= [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}] \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{21} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wniosek:

Jeżeli zespolone moce otwarciowo-zwarciove źródeł rozłożyć na części rzeczywistą i urojoną:

$$S_{nm} = P_{nm} + jQ_{nm}, \quad \text{gdzie } n, m = 1, 2,$$

to ze względu na rzeczywistość wag $[W_{ij}]$ (zob. wzór (4) i (5)), wyrażenie (3) pozwala na wyznaczenie osobno mocy czynnej wymiany:

$$(7) \quad P = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}] \begin{bmatrix} P_{22} \\ P_{21} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix},$$

oraz mocy biernej:

$$(8) \quad Q = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{22} & W_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{22} \\ Q_{21} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix},$$

gdzie: $[P_{ij}]$, $[Q_{ij}]$ – czynne i bierne moce otwarcio-zwarciove źródeł energii elektrycznej. Przy tworzeniu formuł (7) i (8) można też wykorzystywać schematy rotacyjne pokazane na rysunku 4.

Dyskusja współczynników wagowych $[W_{ij}]$

Zachodzi:

$$\begin{aligned} |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ S_{11} S_{22}^* \} &= \\ &= |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 |S_{12}| |S_{21}| \cos \phi \end{aligned}$$

gdzie: $\phi = \angle S_{11} - \angle S_{22}$.

Stąd otrzymuje się nierówność:

$$-2 |S_{12}| |S_{21}| < 2 |S_{12}| |S_{21}| \cos \phi < 2 |S_{12}| |S_{21}|,$$

ponieważ: $-1 < \cos \phi < 1$.

Z otrzymanej nierówności wynika następująca:

$$\begin{aligned} |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 - 2 |S_{12}| |S_{21}| &< \\ < |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 |S_{12}| |S_{21}| \cos \phi <, \\ < |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2 |S_{12}| |S_{21}| \end{aligned}$$

a stąd:

$$(9) \quad \begin{aligned} (|S_{12}| - |S_{21}|)^2 &< |S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 + 2R_{12} < \\ < (|S_{12}| + |S_{21}|)^2 \end{aligned}$$

Ze wzorów (4), (5) i nierówności (9) wynika ostatecznie, że:

$$(10) \quad \begin{aligned} W_{11} &> 0 & W_{12} &> 0 \\ W_{21} &< 0 & W_{22} &< 0 \end{aligned}$$

Ponadto współczynniki wagowe $[W_{ij}]$ spełniają bardziej sprecyzowane nierówności przedziałowe:

$$\begin{aligned} \frac{|S_{11}|^2}{(|S_{12}| + |S_{21}|)^2} &< W_{11} < \frac{|S_{11}|^2}{(|S_{12}| - |S_{21}|)^2} \\ \frac{|S_{12}|^2}{(|S_{12}| + |S_{21}|)^2} &< W_{12} < \frac{|S_{12}|^2}{(|S_{12}| - |S_{21}|)^2} \\ \frac{-|S_{21}|^2}{(|S_{12}| - |S_{21}|)^2} &< W_{21} < \frac{-|S_{21}|^2}{(|S_{12}| + |S_{21}|)^2} \\ \frac{-|S_{22}|^2}{(|S_{12}| - |S_{21}|)^2} &< W_{22} < \frac{-|S_{22}|^2}{(|S_{12}| + |S_{21}|)^2} \end{aligned}$$

Uogólnienie – operatory mocowe – funkcje energetyczne

Wprowadza się tzw. uogólnioną, widmową macierz otwarcio-zwarciowych operatorów mocowych:

$$(11) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{11}(s) & S_{12}(s) \\ S_{21}(s) & S_{22}(s) \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} U_{o1}(s) I_{z1}(-s) & U_{o1}(s) I_{z2}(-s) \\ U_{o2}(s) I_{z1}(-s) & U_{o2}(s) I_{z2}(-s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie: $U_{o1,2}(s)$, $I_{z1,2}(s)$ – transformaty Fouriera odpowiednich sygnałów napięć i prądów rozszerzone na całą płaszczyznę Gaussa, gdzie $s = d/dt$ (zob. też [1]).

Wprowadzając oznaczenia operatorów hermitowskich:

$$(12) \quad \begin{aligned} |S_{ij}|^2(s) &= S_{ij}(s) S_{ij}(-s) \\ R_{12} &= \frac{1}{2} [S_{11}(s) S_{22}(-s) + S_{11}(-s) S_{22}(s)] \end{aligned}$$

i tworząc macierz operatorów (również hermitowskich):

$$(13) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} &= \\ &= \frac{1}{|S_{12}|^2(s) + |S_{21}|^2(s) + 2R_{12}(s)} \begin{bmatrix} |S_{11}|^2(s) & |S_{12}|^2(s) \\ -|S_{21}|^2(s) & -|S_{22}|^2(s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

twierdzeniu o „zespolonej mocy wymiany” nadaje się uogólnioną formę:

$$S(s) =$$

$$(14) \quad = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{22}(s) & W_{21}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{22}(s) \\ S_{21}(s) \\ S_{11}(s) \\ S_{12}(s) \end{bmatrix}.$$

Funkcję energetyczną zmiennej zespolonej $S(s)$ można nazwać „mocowym operatorem wymiany”.

Dla celów dalszych uogólnień wprowadza się rozkłady [2]:

$$S(s) = P(s) + Q(s),$$

gdzie:

$P(-s) = P(s)$ – składowa hermitowska (czynna),

$Q(-s) = -Q(s)$ – składowa antyhermitowska (nieczynna),

skąd:

$$P(s) = \frac{1}{2} [S(s) + S(-s)],$$

$$Q(s) = \frac{1}{2} [S(s) - S(-s)].$$

Zachodzi:

$$S(s) = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}](s) \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{21} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} (s),$$

$$S(-s) = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}](s) \begin{bmatrix} S_{22} \\ S_{21} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix} (-s)$$

i dlatego:

$$P(s) = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}](s) \begin{bmatrix} P_{22} \\ P_{21} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} (s),$$

oraz:

$$Q(s) = [W_{11} \quad W_{12} \quad W_{22} \quad W_{21}](s) \begin{bmatrix} Q_{22} \\ Q_{21} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix} (s).$$

Zachodzą też nierówności:

$$\begin{aligned} W_{11}(j\omega) > 0 \quad W_{12}(j\omega) > 0 \\ W_{21}(j\omega) < 0 \quad W_{22}(j\omega) < 0 \end{aligned} \quad \text{dla } -\infty < \omega < \infty.$$

Można też sformułować bardziej precyzyjne nierówności – uogólnienia dla sformułowanych w poprzednim punkcie.

Obliczenie energii wymiany ze wzoru Parsevall'a przebiega następująco:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} P(j\omega) dj\omega = \\ (15) \quad &= \frac{1}{2\pi j} \int_{C_{Ima}} P(s) ds \end{aligned}$$

gdzie: C_{Ima} – kontur przebiegający osią urojoną, zamknięty lewym lub prawym nieskończonym półokręgiem (lemat Jordana – zob. też [1]).

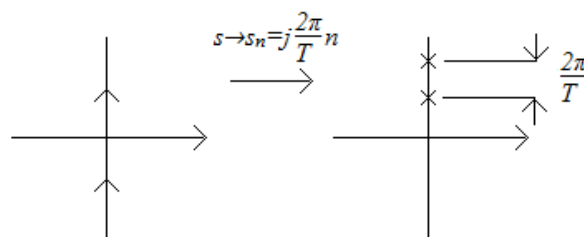
Formule całkowej (15) można również nadać postać sumacyjną poprzez dyskretyzację w dziedzinie częstotliwości (rys. 5) z odstępem pobierania próbek

$\frac{2\pi}{T}$. Wtedy podstawiając: $s \rightarrow s_n = j \frac{2\pi}{T} n$,

$ds \rightarrow s_{n+1} - s_n = j \frac{2\pi}{T}$ (T – okres czasowy), otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(j \frac{2\pi}{T} n\right) (s_{n+1} - s_n) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\left(j \frac{2\pi}{T} n\right) \end{aligned}$$

Jest to wieloharmoniczna wersja wzoru Parsevall'a dla czasowego okresu T .



Rys. 5. Ilustracja próbkowania osi urojonej z odstępem pobierania próbek częstotliwościowych $2\pi/T$

Wnioski

W pracy pokazano, że układ dwóch połączonych ze sobą źródeł napięcia/prądu zmiennego jednoznacznie opisuje pod względem energetycznym czwórka zespolonych parametrów, tzw. mocy otwarciowo-zwarciovych. W szczególności okazuje się, że zespolona moc wymiany energetycznej między tymi źródłami jest dość prostą, elegancką kombinacją tychże mocy otwarciowo-zwarciovych. Pojawia się też możliwość łatwego rozdzielenia zespolonej mocy wymiany na część czynną i bierną, które otrzymuje się z takiego rozdzielenia poszczególnych czterech składowych mocy otwarciowo-zwarciovych. Odbywa się to dzięki wprowadzeniu układu czterech rzeczywistych wag wchodzących w liniową kombinację z zespolonymi mocami otwarciowo-zwarciovymi. Wszystko to stanowi przedmiot tezy tzw. twierdzenia o zespolonej mocy wymiany źródeł energii i o mocach otwarciowo-zwarciovych.

W końcowej części artykułu twierdzenie to uogólniono na energetyczne – operatorowe funkcje wymiany energii między dwoma źródłami.

Autor: prof. zw. dr hab. inż. Maciej Siwczynski, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: msiwczynski@pk.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Siwczynski M.: Energetyczna teoria obwodów, Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków 2003
- [2] Siwczynski M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda splotowa / metoda operatorowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 3 / 4, 254–257 / 134–141