Maciej SIWCZYŃSKI, Konrad HAWRON

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki

doi:10.15199/48.2016.05.42

Rozkłady G, B operatorów immitancyjnych zaburzonych modulacyjnie – realizacja za pomocą filtrów cyfrowych

Streszczenie. *W artykule przedstawiono modyfikację operatorów liniowych czasowo niezmienniczych tak aby dostosować je do przetwarzania sygnałów prawie–okresowo zmodulowanych. W szczególności dotyczy to rozkładu operatora na sumę operatorów: parzystego i nieparzystego. Operatory zrealizowano w formie filtrów cyfrowych typu splotu cyklicznego z dołączonym zaburzeniem modulacyjnym.*

Abstract. *The paper presents a modification of the time–invatiant linear operators to adapt them to the almost–periodically modulated signal processing. In particular, the distribution of the operator to a sum of operators: even and odd. These operators were realized using cyclic convolution type digital filters with addition of modulation disorder.* ***(The G, B distribution of modulation disordered operators – digital filters realization.)***

Słowa kluczowe: operatory, energia, modulacja, filtry cyfrowe.
Keywords: operators, energy, modulation, digital filters.

Wprowadzenie

Głównym zadaniem teorii mocy obwodu z pojedynczym portem energetycznym jest rozkład operatora admitancyjnego obwodu na sumę [1]:

$$Y(s) = G(s) + B(s) = \\ = \frac{1}{2}\left[Y(s) + Y(-s)\right] + \frac{1}{2}\left[Y(s) - Y(-s)\right],$$

gdzie: $G(s)$ – operator parzysty (samosprzężony), tj. $G(-s)=G(s)$; $B(s)$ – operator nieparzysty, tj. $B(-s)=-B(s)$.
Operator $Y(-s)$ jest też sprzężony względem operatora $Y(s)$ w sensie definicji z użyciem iloczynu skalarnego sygnałów x, y: (x,y), tj.:

$$\left(Y(s)x, y\right) = \left(x, Y(-s)y\right),$$

przy dowolnych sygnałach x, y.
Rozkład ten jest jednoznaczny [1] i skutkuje rozbiciem prądu dwójnika na dwie składowe:

$$i = Gu + Bu = i_G + i_B,$$

wzajemnie ortogonalne:

$$\|i\|^2 = \|i_G\|^2 + \|i_B\|^2.$$

Jednocześnie zachodzi:

$$\left(u, i\right) = \left(u, i_G\right),$$

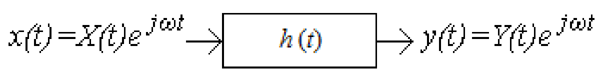
co oznacza, że składowa i_B zwana bierną nie przenosi energii do dwójnika ale szkodliwie powiększa wartość skuteczną prądu.

W artykule [2] opisano sposób realizacji operatorów za pomocą układów analogowych, tj. działających w czasie ciągłym. Ten artykuł pokazuje jak zrealizować operatory $G(s)$, $B(s)$ w czasie dyskretnym, tj. z użyciem filtrów cyfrowych. Tak jak i w artykule [3] sygnał wejściowy napięcia $u(t)$ nie jest okresowy, lecz prawie okresowo zmodulowany, co umożliwia działanie operatorowego rozkładu G, B nie tylko w periodycznych stanach ustalonych, ale także w ciągłych stanach przejściowych.

Twierdzenie o modulacji operatorów

Zastosowanie modulacji do rachunku operatorów ma za zadanie matematyczne przybliżenie opisu zjawisk energetycznych w zaburzonych stanach nieustalonych, tzn. przejścia pomiędzy jednym periodycznym stanem ustalonym a drugim, również periodycznym i ustalonym, za pomocą „poprawki modulacyjnej”.

Wprowadzając czasowo-dyskretne zaburzenie dla filtrów cyfrowych posłużono się wyprowadzeniem częstotliwościowym.



Rys.1. Przechodzenie sygnału zmodulowanego przez układ liniowy, czasowo niezmienniczy o odpowiedzi impulsowej $h(t)$.

Na rysunku 1 przedstawiono przejście zmodulowanego sygnału monoharmonicznego przez układ $H(s)$, gdzie:
$x(t)$, $y(t)$ – sygnał wejściowy (wyjściowy), $X(t)$, $Y(t)$ – amplituda sygnału wejściowego (wyjściowego) zależna od czasu, $e^{j\omega t}$ – sygnał nośny (sinusoida), $h(t)$ – odpowiedź impulsowa układu o transmitancji $H(s)$.

W tym przypadku wyznaczenie transformaty Laplace'a sygnału wejściowego $x(t)$ oraz wyjściowego $y(t)$ przebiega następująco:

$$\overline{x}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\omega t}e^{-st}dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-(s-j\omega t)}dt = \overline{X}(s-j\omega).$$

Relacja ta podaje związek między transformatą Laplace'a sygnału wejściowego, a transformatą Laplace'a jego zespolonej obwiedni.
Zamieniając zmienne $s-j\omega \rightarrow s$ ($s \rightarrow s+j\omega$) otrzymuje się:

$$\overline{y}(s) = H(s)\overline{x}(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{Y}(s-j\omega) = H(s)\overline{X}(s-j\omega) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{Y}(s) = H(s+j\omega)\overline{X}(s) \tag{1}$$

W ten sposób zamiast związku między transformatami Laplace'a sygnałów wejścia i wyjścia otrzymuje się związek między transformatami Laplace'a zespolonych obwiedni tych sygnałów.
Rozwijając (1) w szereg potęgowy względem s, pomijając dalsze wyrazy otrzymuje się:

$$H(\mathrm{s}+j\omega) = H(j\omega) + \frac{dH}{dj\omega}s = H(j\omega) - j\frac{dH}{d\omega}s. \tag{2}$$

Dla sygnału wieloharmonicznie zmodulowanego sygnały wejścia $x(t)$ i wyjścia $y(t)$ mają postać:

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} X_{n\to jn\omega}(t)e^{jn\omega t} \\ y(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Y_{n\to jn\omega}(t)e^{jn\omega t} \end{cases},$$

gdzie: $X_{n\to jn\omega}(t)$, $Y_{n\to jn\omega}(t)$ – widma chwilowe n-tej harmonicznej, zatem zależność opisująca układ ma postać:

$$\overline{Y}_{n\to jn\omega}(s) = H(s+jn\omega)\overline{X}_{n\to jn\omega}(s). \quad (3)$$

Działanie operatora $H(s)$ na sygnał wieloharmonicznie zmodulowany, zgodnie z (2), przedstawia się następująco:

$$H(s+jn\omega) = H(jn\omega) - j\frac{dH}{d\omega}s,$$

zatem wyrażenie (3) przedstawia się jako:

$$\overline{Y}_{n\to jn\omega}(s) = \left[H(jn\omega) - j\frac{dH}{dn\omega}s\right]\overline{X}_{n\to jn\omega}(s).$$

Uogólniając rozważanie na sygnały nieokresowe, tj. sygnały wejściowe $x(t)$ i wyjściowe $y(t)$ postaci:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \overline{X}(s,t)e^{st}ds \\ y(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \overline{Y}(s,t)e^{st}ds \end{cases},$$

gdzie: $\overline{X}(s,t)$, $\overline{Y}(s,t)$ - chwilowe widma ciągłe, otrzymuje się:

$$\overline{Y}(s,t) = \left[H(s) + \frac{dH}{ds}\frac{d}{dt}\right]\overline{X}(s,t),$$

oraz alternatywnie dla sygnałów wieloharmonicznych zmodulowanych:

$$\overline{Y}_{n\to jn\omega}(t) = \left[H(jn\omega) + \frac{dH}{djn\omega}\frac{d}{dt}\right]\overline{X}_{n\to jn\omega}(t).$$

Modelowanie cyfrowe operatorów

Cyfrowemu modelowaniu poddano transformacje obwiedniowe operatorów $G(s)$ i $B(s)$ z uwzględnieniem rozwinięć modulacyjnych pierwszego rzędu:

$$G(s) \xrightarrow{MOD} G(s) + \frac{dG(s)}{ds}\frac{d}{dt}$$

oraz

$$B(s) \xrightarrow{MOD} B(s) + \frac{dB(s)}{ds}\frac{d}{dt},$$

dla których zachodzi:

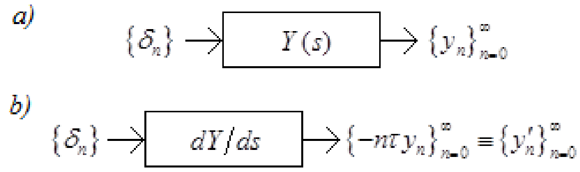
$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{1}{2}\left[Y(s)+Y(-s)\right]; \dfrac{dG}{ds} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{dY}{ds} - \left(\dfrac{dY}{ds}\right)^*\right] \\ B(s) = \dfrac{1}{2}\left[Y(s)-Y(-s)\right]; \dfrac{dB}{ds} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{dY}{ds} + \left(\dfrac{dY}{ds}\right)^*\right] \end{cases}.$$

Modelowanie cyfrowe operatorów odbywa się według schematu przedstawionego na rysunku 2. Wykorzystuje się tu fakt, że pochodnej funkcjonalnej dY/ds odpowiada oryginał czasowy (funkcja impulsowa) $(-t)Y(t)$. Istotnie, zachodzi:

$$Y(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-st}dt \to \frac{dY}{ds} = \\ = \frac{d}{ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(-t)Y(t)e^{-st}dt,$$

stąd:

$$\frac{dY}{ds} = (-t)Y(t) \xrightarrow{\tau} \{-n\tau y_n\}_{n=0}^{\infty}.$$



Rys.2. Modelowanie cyfrowe operatorów: a) $Y(s)$, $G(s)$, $B(s)$; b) dY/ds, dB/ds, dG/ds.

Modelowanie cyfrowe przyczynowego operatora $Y(s)$ (rys. 2) odbywa się za pomocą algorytmu rekurencyjnego przy użyciu wybranej funkcji modelującej $s=D(z)$:

$$Y(s) \xrightarrow{s=D(z)} \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_M z^M}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_M z^M},$$

$$\begin{aligned} y_n &= b_0\delta_n + b_1\delta_{n-1} + b_2\delta_{n-2} + ... + b_M\delta_{n-M} \quad && dla\, n \geq 0 \\ &\quad - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - ... - a_M y_{n-M} && , \\ y_n &= 0 && dla\, n < 0 \end{aligned}$$

gdzie $\{\delta_n\}$ – ciąg Kroneckera.

W celu wyznaczenia cyklicznych funkcji impulsowych N-periodycznych filtrów cyfrowych zastosowano formułę Poissona dotyczącą periodycznego rozprzestrzenienia elementów przestrzeni impulsowej L^1. Zatem dla funkcji:

$$\{f_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \mathbf{L}^1$$

ogólnie zachodzi:

$$\tilde{f}_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f_{n+pN} = f_n + \sum_{p=1}^{\infty}\left(f_{n+pN} + f_{n-pN}\right) \in \mathbf{P}_N, \quad (4)$$

dla $n \in \{0,1,2,...,N-1\}$,

gdzie P_N jest przestrzenią sygnałów N-periodycznych utworzonych z L^1–impulsów.

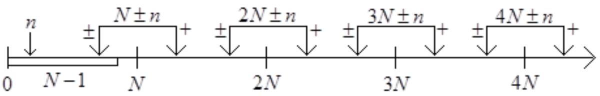
Dla cyklicznych funkcji impulsowych (4) rozpatrzono dwa przypadki szczególne: symetryczny oraz antysymetryczny. W przypadku symetrycznym, tj. gdy $f_n = f_{-n}$ funkcja (4) ma postać:

$$\tilde{f}_n = f_n + \sum_{p=1}^{\infty}\left(f_{pN+n} + f_{pN-n}\right), \quad (5)$$

natomiast w przypadku antysymetrycznym, tj. gdy $f_{-n} = -f_n$:

$$\tilde{f}_n = f_n + \sum_{p=1}^{\infty}\left(f_{pN+n} - f_{pN-n}\right). \quad (6)$$

Dobór próbek cyklicznych funkcji impulsowych (5), (6) odbywa się zgodnie z metodą przedstawioną na rysunku 3, nazwaną metodą „przesuwnego środka ciężkości".



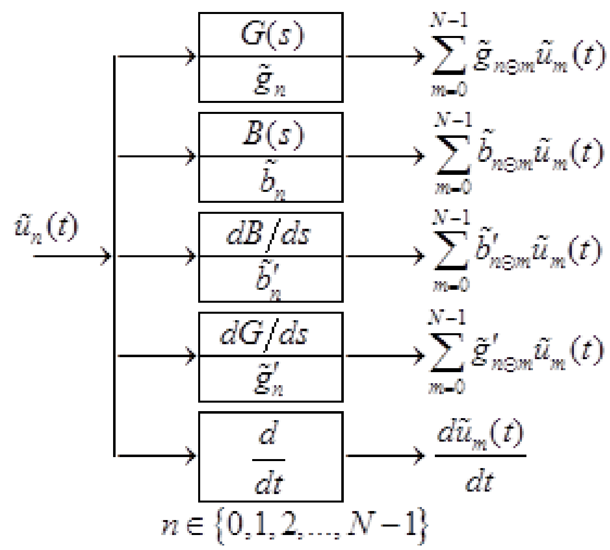
Rys.3. Metoda „przesuwnego środka ciężkości”.

Wykorzystując ogólny zapis funkcji cyklicznych symetryczny (5) i antysymetryczny (6) można przedstawić cykliczne funkcje impulsowe N-periodycznych filtrów cyfrowych odpowiadające operatorom:

$$\begin{cases} G(\mathrm{s}) \to \tilde{\mathrm{g}}_n = \dfrac{1}{2} y_n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\left(y_{pN+n} + y_{pN-n}\right) \\ B(\mathrm{s}) \to \tilde{b}_n = \dfrac{1}{2} y_n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\left(y_{pN+n} - y_{pN-n}\right) \\ \dfrac{dB}{ds} \to \tilde{b}'_n = \dfrac{1}{2} y'_n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\left(y'_{pN+n} + y'_{pN-n}\right) \\ \dfrac{dG}{ds} \to \tilde{\mathrm{g}}'_n = \dfrac{1}{2} y'_n + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\left(y'_{pN+n} - y'_{pN-n}\right) \end{cases},$$

dla $n \in \{0,1,2,...,N-1\}$.

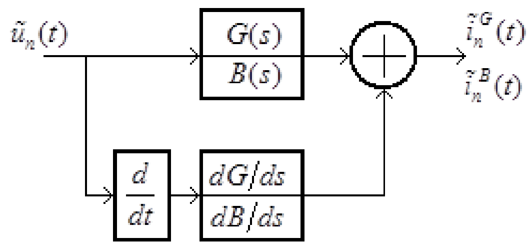
Na rysunku 4 przedstawiono zestaw schematów działania N–periodycznych filtrów cyfrowych, które są modelami operatorów G(s), dG/ds, B(s), dB/ds. Są to filtry działające według splotów cyklicznych. Na wejście filtrów podaje się sygnał periodyczny $\tilde{u}_n(t)$, tj. $n \in \{0,1,2,...,N-1\}$ modulowany czasem $t \in (-\infty,+\infty)$. Na rysunku widoczny jest też blok operatora różniczkowania względem czasu modulującego.



Rys.4. Schemat blokowy działania N-periodycznych filtrów cyfrowych – operatory cykliczno-splotowe.

Pełny uogólniony schemat blokowy działania filtrów cyfrowych, z których otrzymuje się operator czynny oraz bierny w dziedzinie czasu dyskretnego przedstawiono na rysunku 5.

Zgodnie z algorytmem przedstawionym na rysunku 5 otrzymuje się próbki sygnału prądowego czynnego bądź biernego dla danej chwili czasu ciągłego t.



Rys.5. Schemat blokowy operatora czynnego/biernego.

Matematyczne modelowanie stanów nieustalonych

Stan nieustalony jest ujęty jako ciągły proces przejścia (homotopia) układu z jednego okresowego stanu ustalonego w inny, również okresowy i ustalony. Rozpatrzono dwa przypadki takiego ciągłego przejścia pomiędzy stanami ustalonymi $\tilde{u}_n^1(t) \to \tilde{u}_n^2(t)$ dla $n \in \{0,1,2,...,N-1\}$, $t \in (-\infty,+\infty)$.

Pierwszym z nich jest homotopia wykładnicza ze stałą czasową θ, tj. przedstawienie sygnału wejściowego jako:

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_n^1\,\mathrm{e}^{-t/\theta} + \tilde{u}_n^2\left(1-\mathrm{e}^{-t/\theta}\right) dla\,\frac{t}{\theta} \in [0,\infty),$$

drugim jest jej szczególny przypadek – homotopia prostoliniowa:

$$\tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_n^1\left(1-\frac{t}{\theta}\right) + \tilde{u}_n^2\,\frac{t}{\theta}\quad dla\,\frac{t}{\theta} \in [0,1],$$

gdzie: $\{\tilde{u}_n^1\}$ i $\{\tilde{u}_n^2\}$ – dwa sygnały okresowe zadane dla $n \in \{0,1,2,...,N-1\}$.

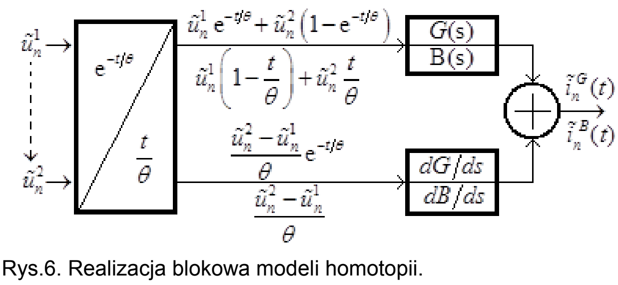
Sygnał pochodnej dla homotopii wykładniczej ma postać:

$$\frac{d\tilde{u}_n(t)}{dt} = \frac{\tilde{u}_n^2 - \tilde{u}_n^1}{\theta}\,\mathrm{e}^{-t/\theta}\quad dla\,\frac{t}{\theta} \in [0,\infty),$$

natomiast dla homotopii prostoliniowej:

$$\frac{d\tilde{u}_n(t)}{dt} = \frac{\tilde{u}_n^2 - \tilde{u}_n^1}{\theta}\quad dla\,\frac{t}{\theta} \in [0,1).$$

Realizację homotopii zilustrowano schematem blokowym na rysunku 6.



Rys.6. Realizacja blokowa modeli homotopii.

Dotyczy ona homotopii zarówno wykładniczej jak i prostoliniowej, przy czym graniczne sygnały dyskretne występujące w przejściu $\tilde{u}_n^1 \to \tilde{u}_n^2$ mają tą samą częstotliwość. Realizacja takiej homotopii bez zmiany częstotliwości odbywa się w ujednolicony sposób, tj. sygnały graniczne mają taką samą częstotliwość oraz zdyskretyzowane próbki dobierane są z takim samym odstępem czasu τ.

Wnioski

Gromadząc odpowiednią liczbę próbek odpowiedzi impulsowej operatora $Y(s)$ można z dowolną dokładnością zidentyfikować periodyczne filtry cyfrowe modelujące operatory $G(s)$, $B(s)$ wraz z ich modulacyjnymi zaburzeniami dG/ds i dB/ds. Cykliczne odpowiedzi impulsowe tych filtrów otrzymuje się z próbek operatora $Y(s)$ za pomocą periodycznych rozprzestrzenień. Stan nieustalony sygnału wejściowego jest realizowany jako ciągła homotopia pomiędzy dwoma cyfrowymi sygnałami zadanymi skończoną liczbą próbek.

***Autorzy**: prof. zw. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: msiwczynski@pk.edu.pl;*
mgr inż. Konrad Hawron, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków,
E-mail: konhawpk@gmail.com.

LITERATURA

[1] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 6, 196-201
[2] Hawron K.: Rachunek operatorowy dla sygnałów impulsowych i okresowych w dziedzinie czasu, *Przegląd Elektrotechniczny*, 90 (2014), nr 9, 225-228
[3] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów dwójników elektrycznych i ich zaburzenia modulacyjne, *Przegląd Elektrotechniczny*, 91 (2015), nr 10, 257-261
[4] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu dyskretnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 86 (2010), nr 7, 338-341
[5] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda splotowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 3, 254-257
[6] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda operatorowa, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 4, 134-141
[7] Siwczyński M.: Postać wykładnicza i hiperboliczna operatora bądź sygnału okresowego w dziedzinie czasu – zastosowania w teorii mocy, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 6, 194-197
[8] Pasko M., Walczak J.: Optymalizacja energetyczno–jakościowych właściwości obwodów elektrycznych z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi, ZN Pol. Śl. Elektryka, 150, Gliwice 1996
[9] Porada R.: Właściwości energetyczne procesów w układach elektrycznych, Wydawn. Pol. Poznańskiej, Rozprawy nr 369, Poznań 2002