

Zastosowanie równań różniczkowo-algebraicznych do predykcji zmian parametrów powietrza wewnętrznego

Streszczenie. W pracy podjęto próbę zastosowania układów równań różniczkowo-algebraicznych DAEs niestosowanych dotychczas do predykcji zmian parametrów określających jakość powietrza wewnętrznego. Za wskaźniki charakteryzujące jakość powietrza w pomieszczeniach zamkniętych uważa się temperaturę, stężenie ditlenku węgla oraz wilgotność względną. W celu zamodelowania przyszłych zmian wskazanych parametrów zaproponowano układ równań różniczkowo-algebraicznych. W stosowanym podejściu zastosowano metodę ruchomego okna czasowego o zróżnicowanej długości. Długość okna wynosiła odpowiednio: 4, 8 oraz 10 punktów czasowych. Horyzont predykcji zawierał się w granicach: 1-15 minut. Do oceny jakości predykcji zastosowano trzy wielkości: średni błąd absolutny, maksymalny błąd absolutny oraz pierwiastek ze średniego błędu kwadratowego.

Abstract. In this paper we attempt to apply differential-algebraic systems to predict changes of indoor air quality (IAQ). So far, differential-algebraic equations (DAEs) have not been used in this way. The indicators of the indoor air quality, which were examined are temperature, relative humidity and carbon dioxide concentration. In order to model changes of these parameters the system of differential-algebraic equations was proposed. The approach applied in this work utilized the method of moving time window with variable length (4, 8, 10 time points). In these time windows models were parameterized. The prediction horizon was in the range from 1 to 15 minutes. To assess prediction quality three measures were used: mean absolute error, maximum absolute error and root mean squared error. **(The new prediction method for determining indoor air quality parameters changes based on differential-algebraic systems)**

Słowa kluczowe: ocena jakości powietrza wewnętrznego, równania różniczkowo-algebraiczne.

Keywords: indoor air quality assessment, differential algebraic equations (DAEs).

Wstęp

Według danych literaturowych coraz więcej osób spędza znaczną część swojego czasu w pomieszczeniach zamkniętych [1]. Wiele prac wskazuje na to, że osoby długotrwale przebywające w pomieszczeniach zamkniętych nie rzadko zmagają się z zespołem dolegliwości charakterystycznym dla syndromu chorego budynku (*ang. sick building syndrome*) [2-6]. W wielu przypadkach występowanie przykrych dolegliwości (m. in. bóle i zawroty głowy, omdlenia) związane jest ze złym stanem powietrza wewnętrznego. Wyniki wcześniejszych prac dowodzą, że zła jakość powietrza wewnętrznego negatywnie wpływa na aktywność umysłową uczniów w szkołach oraz wydajność pracy pracowników w biurach [1, 2, 6]. Na tej podstawie można stwierdzić, że ocena jakości powietrza pomieszczeń zamkniętych stanowi bardzo ważny element diagnostyki budynków.

Ocena jakości powietrza wewnętrznego może być prowadzona za pomocą metod sensorycznych, pomiarowych oraz obliczeniowych. Podstawą sensorycznych metod oceny jakości powietrza wewnętrznego są opinie o jego akceptowalności wyrażane przez użytkowników pomieszczeń. W przypadku metod pomiarowo-obliczeniowych badaniu podlega skład powietrza. Wspomniane badania mogą być wykonywane dla różnych zestawów parametrów. Przykładowym zestawem parametrów jest: temperatura, stężenie ditlenku węgla oraz wilgotność względna. Na podstawie wyników badań prowadzonych metodami pomiarowymi można konstruować modele matematyczne opisujące zachowanie się wspomnianych parametrów. Jednym z ciekawszych problemów jest opis ich zmienności w czasie. Modele skonstruowane według tej zasady dostarczają informacji na temat charakteru zmian zachodzących w powietrzu wewnętrznym. Istnieje możliwość zastosowania w tym celu układów równań różniczkowo-algebraicznych (DAEs). Według danych literaturowych układy DAEs dedykowane są jako narzędzie do opisu układów o zmiennej dynamice [7, 8].

W pracy podjęto próbę zastosowania układów równań różniczkowo-algebraicznych do predykcji zmian parametrów uważanych za wskaźniki jakości powietrza wewnętrznego. Zalicza się do nich: temperaturę, stężenie ditlenku węgla

oraz wilgotność względną.

Metoda

Równaniami różniczkowo-algebraicznymi, *ang. differential - algebraic equations (DAEs)* nazywamy układ równań, który przybiera postać:

$$(1) \quad F(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

przy jednoczesnym spełnieniu warunku, że macierz Jacobiego $J = \frac{\partial F}{\partial x'}$ jest osobliwa (nieodwracalna) dla każdego t oraz, jeżeli $x(t) \in \mathcal{R}^n$, wtedy

$$(2) \quad F(t, x(t), x'(t)) = \begin{pmatrix} F_1(t, x(t), x'(t)) \\ F_2(t, x(t), x'(t)) \\ \dots \\ F_n(t, x(t), x'(t)) \end{pmatrix}.$$

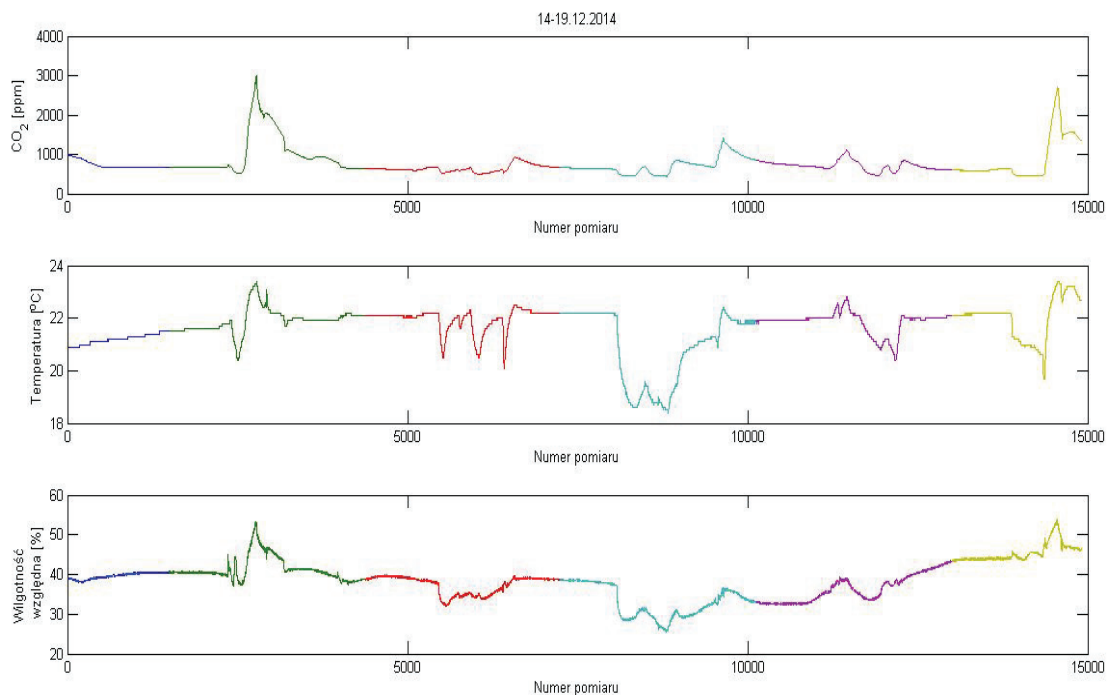
Jeżeli macierz Jacobiego jest nieosobliwa (odwracalna), wówczas układ równań (1) może zostać przekształcony do układu równań różniczkowych zwyczajnych, *ang. ordinary differential equations (ODEs)*:

$$(3) \quad x' = f(t, x).$$

Obecnie istnieje bardzo wiele metod numerycznych, które pozwalają rozwiązywać układy równań różniczkowych zwyczajnych postaci (3). Jeżeli jednak macierz Jacobiego $\frac{\partial F}{\partial x'}$ jest nieodwracalna, wówczas mamy do czynienia z układem równań różniczkowo-algebraicznych, którego nie można bezpośrednio przepisać do powszechnie znanej postaci ODEs [8, 9].

Każdy układ DAEs może zostać zapisany w postaci ogólnej (niejawnej, *fully-implicit*), co prezentuje równanie (1). W zależności od rozważanego przypadku, układy różniczkowo-algebraiczne charakteryzują się określoną strukturą. Struktura ta jest specyficzna dla danego obszaru aplikacyjnego [10, 11]. Najczęściej występującą postacią układu DAEs jest forma półjawna (*semi-explicit form*):

$$(4) \quad \begin{aligned} x'(t) &= f(t, z, x) \\ 0 &= g(t, z, x), \end{aligned}$$



Rysunek 1. Szeregi czasowe parametrów powietrza wewnętrznego pochodzące z okresu czasu: 14-19.12.2014, sala wykładowa Politechniki Wrocławskiej. Różnymi kolorami oznaczono kolejne dni, w których prowadzono pomiary. Pomiar parametrów wykonywano w trybie ciągłym co 30 sek.

gdzie:

- zmienna różniczkowa $x(t) \in \mathcal{R}^{n_d}$,
- zmienna algebraiczna (w układzie nie występuje jej pochodna) $z(t) \in \mathcal{R}^{n_a}$,
- część różniczkowa $f : \mathcal{R}^{n_d} \times \mathcal{R}^{n_a} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{n_d}$,
- część algebraiczna $g : \mathcal{R}^{n_d} \times \mathcal{R}^{n_a} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{n_a}$,
- zmienna niezależna t .

Poziom złożoności układu równań różniczkowo-algebraicznych określa indeks układu. Indeks układu nazywamy minimalną liczbę kroków takich jak różniczkowanie oraz manipulacje algebraiczne, które pozwalają na przekształcenie DAEs w ODEs. Ponieważ rozwiązanie układu równań różniczkowo-algebraicznych w sposób analityczny często stanowi czasochłonne i trudne wyzwanie, w praktyce wiedza na temat matematycznej struktury DAEs umożliwia wybór odpowiedniego oprogramowania oraz algorytmów obliczeniowych.

Zastosowanie równań różniczkowo-algebraicznych do modelowania układów o zmiennej dynamice (np. modele mechaniki ciała, kontrola procesów i kinetyka reakcji chemicznych) przynosi wiele korzyści. Przede wszystkim sprawia, że nie trzeba wykonywać skomplikowanych przekształceń w celu otrzymania równań różniczkowych zwyczajnych. Na skutek braku dodatkowych przekształceń można bezpośrednio obserwować wpływ i rolę wybranych zmiennych. Takie podejście bardzo upraszcza budowę modelu, co powoduje, że sprawdzenie poprawności jego opisu jest również dużo łatwiejsze. Ponadto w modelu DAEs mogą zostać uwzględnione znane prawa fizyczne, które bardzo często przyjmują postać równań algebraicznych (np. zasada zachowania masy i energii). Zapisanie praw fizycznych w powszechnie znanej postaci powoduje, że zmienne wystę-

pujące w układzie zachowują swój sens fizyczny [12-16].

Część eksperymentalna

Rejestracja parametrów powietrza wewnętrznego wykonywana była w sali wykładowej Politechniki Wrocławskiej o wymiarach 14×8 m. Wysokość pomieszczenia wynosiła 4 m (w pierwszych rzędach) i 2.9 m (w ostatnich rzędach). Do badań zastosowano rejestrator firmy Delta Ohm HD37B17D, który usytuowano z przodu sali na wysokości 1.5 m. Przyrząd wykonywał pomiary temperatury i wilgotności względnej powietrza oraz stężenia CO_2 w sposób ciągły. Wyniki pomiarów były rejestrowane z częstotliwością 30 s. Badania prowadzono w dniach: 14-19.12.2014 roku. Pozyskane informacje zapisano w postaci uporządkowanych struktur danych, co umożliwiło odwoływanie się do konkretnych danych pomiarowych oraz ich dalsze przetwarzanie. Do opracowania wyników zastosowano środowisko MatLab.

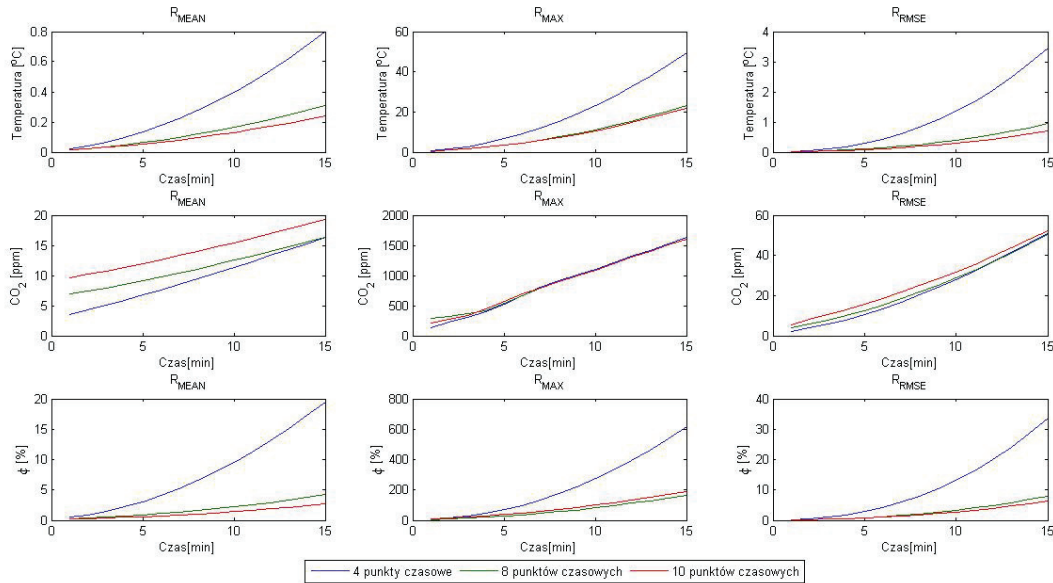
Model DAEs dla T, CO_2 , Φ

Struktura modelu. Rozpatrywany model składał się z trzech parametrów: temperatury (T), stężenia ditlenku węgla (CO_2) oraz wilgotności względnej (ϕ). Wspomniane parametry powiązane zostały w układ równań za pomocą równań różniczkowo-algebraicznych (DAEs). Na tej podstawie założono półjawną postać modelu

$$(5) \quad F(x'(t), x(t), z(t), t) = \begin{pmatrix} x'(t) = f_1(x(t), z(t), t) \\ 0 = f_2(x(t), z(t), t) \end{pmatrix},$$

Następnie układ równań (5) przepisano do postaci jawnej

$$(6) \quad \begin{cases} T'(t) = f_1(T(t), CO_2(t), \phi(t), t) \\ \phi'(t) = f_2(T(t), CO_2(t), \phi(t), t) \\ 0 = f_3(T(t), CO_2(t), \phi(t), t). \end{cases}$$



Rysunek 2. Zestawienie błędów predykcji zmian temperatury, stężenia ditlenku węgla oraz wilgotności względnej w zależności od horyzontu czasowego prognozy.

Zakładając, że równania wchodzące w skład układu będą liniowe otrzymano ostateczną postać modelu

$$(7) \quad \begin{cases} T'(t_n) = a_1 t_n + a_2 \\ \phi'(t_n) = c_1 t_n + c_2 \\ 0 = CO_2(t_n) - b_1 t_n - b_2. \end{cases}$$

z nieznanymi warunkami początkowymi

$$(8) \quad T(t_1) = a_0$$

oraz

$$(9) \quad \phi(t_1) = c_0,$$

gdzie:

- szybkość zmiany temperatury $T'(t_n)$,
- stężenie ditlenku węgla $CO_2(t_n)$,
- szybkość zmiany wartości wilgotności względnej $\phi'(t_n)$,
- kolejna chwila wykonania pomiaru $\{t_n\}_{n=1}^k$,
- nieznanne parametry modelu $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$.

Zakres modelowania. Przedmiotem modelowania były szeregi czasowe parametrów powietrza wewnętrznego. Model (7) z warunkami początkowymi (8)-(9) parametryzowano na oknie czasowym różnej długości. Długość okna wynosiła odpowiednio: 4, 8 oraz 10 punktów czasowych. Dobór parametrów modelu prowadzony został zgodnie z regułą najmniejszych kwadratów. Opracowane w ten sposób modele rozwiązywano na 15 min do przodu stosując metodę ruchomego okna. Każdorazowo okno przesuwało o dwa pomiary.

Ocena jakości predykcji. Do oceny jakości predykcji zastosowano następujące błędy

a) średni błąd absolutny

$$(10) \quad R_{MEAN} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_m(t_i) - r_p(t_i)|,$$

b) maksymalny błąd absolutny

$$(11) \quad R_{MAX} = \max_{i=1, \dots, N} (|r_m(t_i) - r_p(t_i)|),$$

c) pierwiastek ze średniego błędu kwadratowego (*root mean squared error, RMSE*)

$$(12) \quad R_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |r_m(t_i) - r_p(t_i)|^2}.$$

Błędy obliczono dla następujących horyzontów predykcji: 1-15 min.

Metody rozwiązywania modelu. W pracy zaproponowano różniczkowo-algebraiczny model zmian parametrów, które są uważane za wskaźniki jakości powietrza wewnętrznego. W badaniach symulacyjnych układy równań DAEs były rozwiązywane metodą różnic wstecznych (*Backward Differentiation Formula*), która jest znana także jako metoda Gear'a. Prezentowane wyniki zostały otrzymane poprzez zastosowanie metody BDF pierwszego rzędu.

Spośród wszystkich możliwych wariantów metody wstecznego różniczkowania, metoda BDF 1 rzędu została wybrana ze względu na dwie szczególne właściwości. Pierwszą z nich jest stabilność takiego schematu rozwiązywania.

Wybór metody BDF pierwszego rzędu został ponadto podyktowany czasem trwania symulacji. Ze względu na stopień stosowanych wielomianów interpolacyjnych, wyższy rząd metody BDF oznacza także konieczność przeprowadzenia bardziej złożonych obliczeń. Na skutek przesuwania okna pomiarowego każdorazowo o dwa pomiary, w rezultacie dla zadanej długości danych uczących dobór parametrów modelu należało przeprowadzić niespełna 15 000 razy.

W przeprowadzonych badaniach podkreślono w ten sposób jedną z najważniejszych różnic pomiędzy modelami DAEs a ODEs. Wykorzystując metody rozwiązywania równań różniczkowo-algebraicznych nie ma konieczności, aby model układu był przekształcony do postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Wyniki badań i dyskusja

Na rys. 1 przedstawione zostały szeregi czasowe temperatury, stężenia ditlenku węgla oraz wilgotności względnej zarejestrowane w sali wykładowej Politechniki Wrocławskiej w okresie zimowym. Wyniki oceny błędu predykcji zamiesz-

czono na rys. 2. Na podstawie przeprowadzonych badań zauważono, że w zależności od rodzaju analizowanych parametrów oraz długości okna czasowego na którym parametryzowany był model błędy osiągały różne wartości. Aby określić prawidłowy horyzont czasowy predykcji badanych parametrów powietrza wewnętrznego należy uwzględnić wszystkie wymienione błędy. Średni błąd absolutny oraz R_{RMSE} wskazują na średnią różnicę występującą pomiędzy wynikami otrzymanymi z modelu, a wartościami mierzonymi. Absolutny błąd maksymalny eksponuje sytuacje ekstremalne. Rozpatrując horyzont czasowy predykcji wynoszący 5 min stwierdzono, że średni błąd absolutny dla temperatury był najmniejszy (0.06 °C), gdy zastosowano okno składające się z 10 punktów czasowych. Podobną sytuację odnotowano w przypadku analizy średniego absolutnego błędu predykcji dla wilgotności względnej (0.6 %). Analiza błędu R_{MEAN} prowadzona w tym samym horyzoncie prognozy, ale dla stężenia ditlenku węgla wykazała z kolei, że najmniejszy błąd predykcji (6.8 ppm) występował, gdy zastosowane zostało okno najkrótsze (składające się z 4 punktów czasowych).

Ocena jakości predykcji prowadzona na podstawie maksymalnego absolutnego błędu oraz horyzontu prognozy wynoszącego 5 min wskazała na występowanie bardzo dużych wartości błędu dla wszystkich rozpatrywanych parametrów (3.5 °C dla temperatury, 524 ppm dla stężenia ditlenku węgla oraz 37.6% dla wilgotności względnej). Należy jednak pamiętać, że analizowany maksymalny błąd absolutny przedstawiał największe odchylenia od wartości mierzonych.

Analiza jakości predykcji średniego błędu kwadratowego była najbardziej zadowalająca w przypadku zastosowania okna składającego się z dziesięciu punktów czasowych (analiza błędu predykcji temperatury oraz wilgotności względnej). W przypadku wyników otrzymanych dla stężenia ditlenku węgla zauważono, że długość okna czasowego praktycznie nie wpływała na wynik analizy.

Podsumowanie i wnioski

W pracy podjęto próbę zastosowania układów równań różniczkowo-algebraicznych (DAEs) do predykcji zmian parametrów powietrza wewnętrznego. Były to: temperatura, stężenie ditlenku węgla oraz wilgotność względna. Wspomniane parametry uważane są za wskaźniki jakości powietrza wewnętrznego.

Do oceny prawidłowego horyzontu czasowego predykcji badanych parametrów zastosowano trzy wspomniane rodzaje błędów: średni błąd absolutny, maksymalny błąd absolutny oraz pierwiastek ze średniego błędu kwadratowego. Na tej podstawie stwierdzono, że rozważany model DAEs umożliwia wykonanie predykcji z akceptowalnym błędem w horyzoncie czasowym 5 min.

Celem dalszych badań będzie ocena błędu predykcji dla innych modeli różniczkowo-algebraicznych, które mogą znaleźć zastosowanie w sytuacjach zróżnicowanej dynamiki zmian wartości parametrów charakteryzujących powietrze wewnętrzne.

Podziękowania

Praca została zrealizowana na Politechnice Wrocławskiej w ramach grantu B50281 W4K8.

Autorzy: dr hab. Andrzej Szczurek, prof. nadzw. PWr, mgr inż. Marlena Kwiatkowska, Politechnika Wroclawska, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska, Katedra Klimatyzacji, Ogrzewnictwa, Gazownictwa i Ochrony Powietrza, ul. Norwida 4/6, 50-373 Wrocław, email: andrzej.szczurek@pwr.edu.pl, marlena.kwiatkowska@pwr.edu.pl, mgr inż. Paweł Drag, Politechnika Wroclawska, Wydział Elektroniki, Katedra Automatyki, Mechatroniki i Systemów Sterowania, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370, Wrocław, pawel.drag@pwr.edu.pl.

LITERATURA

- [1] Maciejewska M., Szczurek A.: Representativeness of shorter measurement sessions in long-term indoor air monitoring, *Environmental Science Processes and Impacts*, 17, pp. 381-388, 2015.
- [2] Dolega A.: Badanie jakości powietrza w obiekcie sakralnym, *Interdyscyplinarne zagadnienia w inżynierii i ochronie środowiska*. Tom 6., Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, pp. 86-99, 2015.
- [3] Lim F.M. et al.: Sick building syndrome (SBS) among office workers in a Malaysian university - Associations with atopy, fractional exhaled nitric oxide (FeNO) and the office environment, *Science of the Total Environment*, 536, pp. 353-361, 2015.
- [4] Lu C.-Y. et al.: Building-related symptoms among office employees associated with indoor carbon dioxide and total volatile organic compounds, *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 12, pp. 5833-5845, 2015.
- [5] Jafari M.J. et al.: Association of sick building syndrome with indoor air parameters, *Tanaffos*, 14, pp. 55-56, 2015.
- [6] Poednik B.: Zanieczyszczenia a jakość powietrza wewnętrznego w wybranych pomieszczeniach, *Monografie Komitetu Inżynierii Środowiska PAN*, vol. 116, Lublin, 2013.
- [7] Biegler L.T., Campbell S., Mehrmann V.: *DAEs, Control, and Optimization*, SIAM, Philadelphia, 2012.
- [8] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [9] Hairer E., Lubich C., Roche M.: *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1989.
- [10] Kwiatkowska M.: Badanie zmienności w czasie parametrów powietrza wewnętrznego z zastosowaniem metody DAEs, *Interdyscyplinarne zagadnienia w inżynierii i ochronie środowiska*. Tom 6., Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, pp. 214-220, 2015.
- [11] März R., Schwarz D.E., Feldmann U., Sturtzel S., Tischendorf C.: Finding Beneficial DAE Structures in Circuit Simulation, Jäger W. et al. (eds.), *Mathematics - Key Technology for the Future*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 413-428, 2003.
- [12] Betts J.T.: *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*, SIAM, Philadelphia, 2010.
- [13] Biegler L.T.: *Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes*, SIAM, Philadelphia, 2010.
- [14] Diehl M., Bock H.G., Schlöder J.P., Findeisen R., Nagy Z., Allgöwer F.: Real-time optimization and nonlinear model predictive control of processes governed by differential-algebraic equations, *Journal of Process Control*, 12, pp. 577-585, 2002.
- [15] Nocedal J., Wright S.J.: *Numerical Optimization*. Second Edition, Springer, New York, 2006.
- [16] Petzold L.: Differential-algebraic equations are not ode's, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3, pp. 367-384, 1982.