

# Badanie dokładności rekonstrukcji powierzchni z interferogramu światła białego z wykorzystaniem metod bazujących na transformacie Hilberta

**Streszczenie.** W pracy opisano metody rekonstrukcji profilu powierzchni z interferogramu światła białego. Po krótkim wprowadzeniu do teorii sygnałów analitycznych, zaproponowano cztery metody rekonstrukcji profilu powierzchni wykorzystujące dyskretną transformatę Hilberta. Przedstawiono wyniki badań dokładności tych metod na przykładzie rekonstrukcji powierzchni płaskiej pochylej oraz kulistej.

**Abstract.** The paper describes methods of surface profile reconstruction from the white light interferogram. The theoretical basis for a theory of analytical signals are given. Four methods for the reconstruction of the surface profile using a discrete Hilbert transform are offered. The accuracy analyses of these methods are presented on an example of the slant planar surface and spherical surface reconstruction. (Investigation of surface reconstruction precision from white light interferograms based on Hilbert transform).

**Słowa kluczowe:** model matematyczny interferogramu światła białego, metoda rekonstrukcji powierzchni, transformata Hilberta, błąd rekonstrukcji powierzchni płaskiej i kulistej.

**Keywords:** mathematic model of white light interferogram, method of surface reconstruction, Hilbert transform, reconstruction error of slant planar surface and spherical surface.

## Wstęp

W wielu dziedzinach nauki i technologii pojawia się zagadnienie pomiaru parametrów powierzchni, na przykład jej profilu, chropowatości itd. W ostatnich latach znaczne zainteresowanie budzi wykorzystanie interferometrii światła białego (White Light Interferometry - WLI) do rekonstrukcji profilu powierzchni. Do zalet tej metody należy brak kontaktu z badanym obiektem, wysoka rozdzielczość, możliwość kontroli powierzchni o charakterze schodkowym [1,2,3].

Ze względu na rozwój technologii komputerowych otwierają się nowe możliwości automatyzacji procesu pomiaru i przetwarzania interferogramów. Ułatwia to korzystanie z tej techniki pomiarowej i rozszerza jej zakres zastosowań dzięki możliwości przetwarzania w czasie rzeczywistym oraz zwiększeniu dokładności [4,5,6].

W porównaniu z konwencjonalną interferometrią światła monochromatycznego obróbka interferogramu światła białego w celu rekonstrukcji topologii powierzchni jest bardziej skomplikowana. Wynika to z wpływu obwiedni na sygnał natężenia. Obecnie opracowano szereg metod rekonstrukcji, na przykład w dziedzinie przestrzennej (spatial domain), metoda detekcji obwiedni lub wyznaczania maksymalnej wartości intensywności, a w dziedzinie częstotliwości - metoda przesunięcia fazy (phase-shifting) lub przetwarzania Fouriera [7,8,9]. Jednak metody te nie zawsze są skuteczne, na przykład przy nieliniowym kształcie powierzchni [10,11,12].

Wciąż aktualnym pozostaje zagadnienie opracowania nowych skutecznych metod rekonstrukcji powierzchni z obrazu interferometrycznego uzyskanego techniką WLI. W niniejszej pracy zaprezentowano kilka metod rekonstrukcji bazujących na transformacie Hilberta. Zbadano również dokładność rekonstrukcji profilu powierzchni nieliniowych tymi metodami.

## Model matematyczny interferogramu światła białego i zagadnienie rekonstrukcji profilu powierzchni

Zjawisko interferencji powstaje w wyniku nałożenia dwu lub więcej koherentnych fal światła, w wyniku czego obserwujemy wzmocnienie lub tłumienie fali sumarycznej (jasne i ciemne prążki na obrazie interferogramu). Interferometry są przyrządami optycznymi wykorzystującymi interferencję do pomiaru wielkości geometrycznych

różnych obiektów. Nowoczesne interferometry światła białego na przykład Talysurf CCI 6000 zapewniają pomiary w osi pionowej z rozdzielczością poniżej 1 Å, czyli 10<sup>-10</sup>m [13].

Niski poziom korelacji fal światła białego powoduje zanik intensywności prążków na krawędziach obrazu. Taka osobliwość interferogramu WLI z jednej strony jest jego zaletą pozwalającą na jednoznaczną rekonstrukcję złożonych powierzchni o charakterze schodkowym (w odróżnieniu od monochromatycznej koherentnej interferometrii), zaś z drugiej strony zanik intensywności prążków utrudnia analizę interferogramu [4,10,11].

Funkcję matematyczną opisującą natężenie światła interferogramu, zwaną dalej modelem matematycznym interferogramu światła białego można opisać za pomocą następujących wzorów [4,14]

$$(1) \quad I(T) = I_0 + E(T) \cdot C(T)$$

$$(2) \quad E(T) = I_M \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \Delta\lambda^2 \cdot T^2}{\lambda_0^4}\right) \quad (\text{obwiednia})$$

$$(3) \quad C(T) = \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{\lambda_0} \cdot T\right) \quad (\text{fala nośna}).$$

gdzie  $I_0$  – składowa stała,  $I_M$  – amplituda obwiedni natężenia światła;  $T$  – różnica drogi optycznej;  $\lambda_0$  i  $\Delta\lambda$  – środkowa długość fali światła oraz szerokość gęstości widmowej źródła światła białego.

Model interferogramu łączy różnicę drogi optycznej  $T$  promieni odbitych od badanej i referencyjnej powierzchni z natężeniem pikseli  $I(T)$  w każdym punkcie powierzchni  $(x,y)$  interferogramu. Zagadnienie rekonstrukcji polega na wyznaczeniu z równania nieliniowego (1) parametru  $T$ , występującego jednocześnie w argumentcie jak i w funkcji obwiedni  $E(T)$  o kształcie funkcji Gaussa. Założono, że fala nośna  $C(T)$  jest opisana funkcją cosinus.

Odległość dowolnego punktu  $n$  od powierzchni można wyznaczyć po przeskalowaniu różnicy dróg optycznych:

$$(4) \quad h_n = \frac{T_n}{\nu},$$

gdzie  $\nu$  – współczynnik załamania światła ośrodka.

## Sygnal analityczny oraz transformata Hilberta

Z punktu widzenia teorii sygnałów model interferogramu światła białego jest modelem wąskopasmowym, skupionym wokół częstotliwości określonej środkową odpowiadającej długości fali źródła światła

$$(5) \quad \omega_0 = 4\pi / \lambda_0.$$

Analizę tego typu sygnałów wygodnie prowadzić w oparciu o ich zespoloną (analityczną) reprezentację, pozwalającą na rozszerzenie pojęć amplitudy i fazy na sygnały nieharmoniczne [15,16].

Rozważmy klasę sygnałów harmonicznych o pulsacji  $\omega_0$  ze zmienną w czasie amplitudą  $A(t)$  i fazą początkową  $\varphi(t)$

$$(6) \quad s(t) = A(t) \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Człon  $A(t)$  modelu jest nazywany obwiednią amplitudy, a wielkość  $\varphi(t)$  – funkcją fazową. Argument funkcji cosinus oznacza pełną fazę sygnału

$$(7) \quad \Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t).$$

Uogólnieniem modelu (6) sygnału rzeczywistego  $s(t)$  jest jego postać zespolona, czyli model sygnału analitycznego. Sygnal analityczny  $S_A(t)$  powstaje z sygnału analizowanego  $s(t)$  poprzez dodanie do niego części urojonej  $s_Q(t)$  będącej dopełnieniem kwadraturowym do  $s(t)$

$$(8) \quad S_A(t) = s(t) + j \cdot s_Q(t).$$

Zespolony sygnał analityczny  $S_A(t)$  można zapisać w postaci kartezjańskiej (8) lub w formie wykładniczej

$$(9) \quad S_A(t) = A(t) \cdot \exp[j \cdot \Phi(t)],$$

gdzie

$$(10) \quad A(t) = \text{Mod}[S_A(t)] = [(s^2(t) + j s_Q^2(t))]^{1/2}$$

to obwiednia amplitudy, a

$$(11) \quad \Phi(t) = \text{Arg}[S_A(t)]$$

faza sygnału.

Kluczem do syntezy sygnału analitycznego jest transformata Hilberta, która dla dowolnego sygnału rzeczywistego  $s(t)$  zapewnia uformowanie jego niezerowego „kwadraturowego ekwiwalentu”  $s_Q(t)$ , spełniającego warunek

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s_Q(t) dt = 0.$$

Wzór analityczny transformaty Hilberta ma postać [16]

$$(13) \quad s_Q(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

gdzie  $\tau$  i  $t$  – argument dla sygnału analizowanego (wejściowego) oraz wyjściowego.

Całka (13) ma strukturę splotu analizowanego sygnału  $s(t)$  z funkcją:

$$(14) \quad h(t) = 1/\pi t,$$

będącą jądrem transformaty Hilberta. Funkcję opisaną wzorem (11) można potraktować jako charakterystykę impulsową układu liniowego, realizującego przekształcanie Hilberta. Następnie można wyznaczyć transmitancję częstotliwościową tego układu

$$(15) \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j, & \omega > 0 \end{cases}.$$

Transformata Hilberta pozwala na uzyskanie dopełnienia kwadraturowego analizowanego sygnału  $s(t)$ , jako sygnał, którego każda z harmonicznich zawarta w widmie została przesunięta o  $90^\circ$ .

w praktyce, dla sygnału rzeczywistego, za pomocą przekształcania Hilberta wyznacza się dopełnienie kwadraturowe (zespolony sygnał sprzężony) w sposób przybliżony, ze względu na skończone granice całkowania.

Na przykład w pakiecie MATLAB dla uformowania sygnału analitycznego służy funkcja 'hilbert', wykorzystująca następujący algorytm:

- obliczanie szybkiej transformaty Fouriera (FFT) sygnału analizowanego,

- wyzerowanie widma w zakresie ujemnych częstotliwości,

- wykonanie odwrotnej FFT.

W dalszej części artykułu zaprezentowano cztery metody rekonstrukcji profilu powierzchni z interferogramu światła białego, bazujące na aparacie matematycznym dotyczącym sygnału analitycznego.

## Rekonstrukcja profilu powierzchni metodą estymacji obwiedni interferogramu

Jak wynika z modelu interferogramu światła białego parametr  $T$  można wyznaczyć ze wzoru (2) opisującego obwiednię  $E(T)$

$$(16) \quad E(T) = I_M \cdot \exp\left(-\frac{4 \cdot \Delta\lambda^2 \cdot T^2}{\lambda_0^4}\right).$$

Następnie według wzoru (10) można wyznaczyć obwiednię interferogramu. W tym celu bazując na transformacie Hilberta należy wyznaczyć kwadraturową składową sygnału intensywności

$$(17) \quad I_Q(T) = \mathbf{H}\{L(T)\},$$

gdzie  $\mathbf{H}\{\ast\}$  – operator Hilberta, natomiast  $L(T)$  – sygnał intensywności z wyeliminowaną składową stałą

$$(18) \quad L(T) = I(T) - I_0.$$

Ponieważ dopełnienie kwadraturowe w praktyce wyznacza się z pewnym błędem, możemy jedynie estymować obwiednię z ograniczoną dokładnością. Więc estymatę obwiedni można obliczyć według wzoru

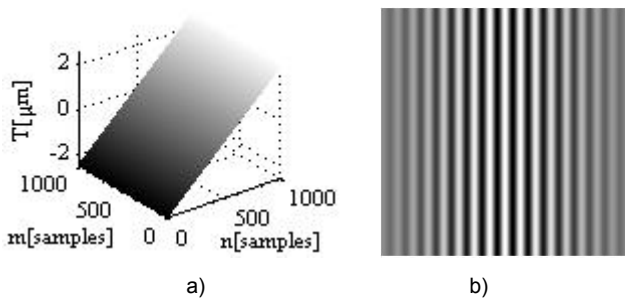
$$(19) \quad \hat{E}(T) = \text{Mod}[\hat{I}(T)] = [(L_-^2(T)(t) + j \cdot I_Q^2(T))]^{1/2},$$

gdzie  $\hat{I}(T)$  – sygnał intensywności w postaci zespolonej.

Zastosowanie praktyczne algorytmu oraz badanie dokładności rekonstrukcji profilu powierzchni przeprowadzono w pakiecie MATLAB. Metodyka badań obejmowała syntezę powierzchni, uformowanie interferogramu światła białego na podstawie modelu matematycznego - wzory (1), (2), (3) oraz kolejną rekonstrukcję powierzchni z interferogramu. Znajomość kształtu powierzchni w procesie uformowania interferogramu oraz jej wersji rekonstruowanej umożliwi wyliczenie jedynie błędów metody rekonstrukcji bez uwzględnienia wpływu innych czynników, które występują podczas eksperymentu fizycznego.

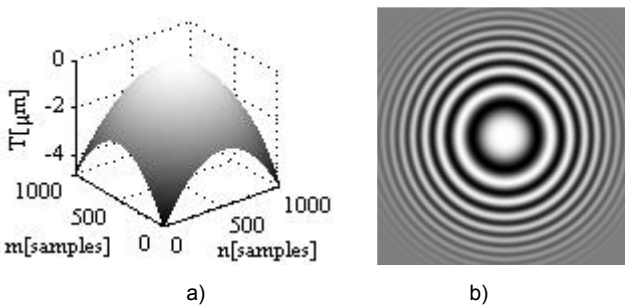
Badania dokładności rekonstrukcji metodą estymacji obwiedni interferogramu zostały przeprowadzone dla powierzchni płaskiej pochyłej i kulistej. Powierzchnia pochyła występuje na przykład w zagadnieniach pomiarów małych kątów nachylenia obiektów płaskich, zaś powierzchnia kulista odpowiada na przykład modelowi membrany czujnika w pomiarach ciśnienia.

Na rysunku 1 i 2 przedstawiono kształty badanych powierzchni oraz obrazy ich interferogramów.



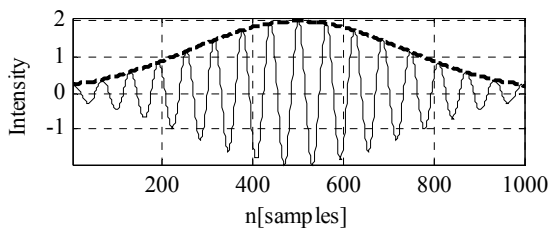
Rys. 1. Kształt syntezywanej pochyłej powierzchni płaskiej (a) oraz obraz jej interferogramu światła białego (b)

Podczas symulacji zostało wybrane źródło światła białego o parametrach  $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$  i  $\Delta\lambda = 51,6 \text{ nm}$ , a wymiar powierzchni wzdłuż osi  $x$  i  $y$  wynosił  $10 \times 10 \text{ mm}$ . W modelowaniu założono wykorzystanie CCD-kamery o rozdzielczości  $1000 \times 1000$  pikseli, stąd okres próbkowania w przestrzeni (rozdzielczość lateralna) wynosi  $10 \mu\text{m}$ .



Rys. 2. Kształt syntezywanej powierzchni kulistej (a) oraz obraz jej interferogramu światła białego (b)

Niżej na rysunku 3 przedstawiono wykres sygnału intensywności dla powierzchni pochyłej wzdłuż osi  $x$  przy wybranej stałej wartości  $y$ , czyli pojedyncza linia interferogramu. Na podstawie tego sygnału można rekonstruować przekrój pionowy (profil) badanej powierzchni po osi  $x$ , a zbiór profili dla różnych wartości  $y$ , tworzy topologię całej powierzchni. Osobliwością powierzchni pochyłej jest jednakowość różnych wierszy interferogramu (rys.1).



Rys. 3. Reprezentacja 1D pojedynczego wiersza interferogramu światła białego dla powierzchni pochyłej wraz z estymatorem jej obwiedni (pogrubiona linia przerywana)

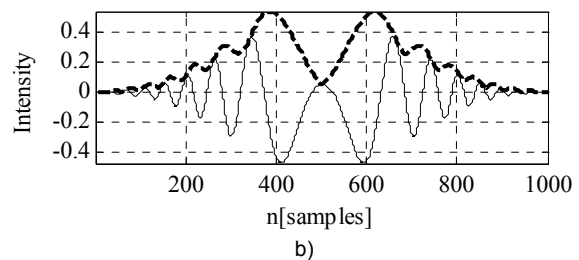
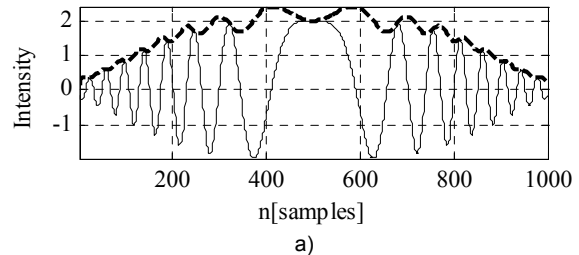
Dla powierzchni kulistej wiersze interferogramu są różne, czyli sygnały intensywności zależą od  $y$ . Jako przykład na rysunku 4 pokazano sygnały intensywności dla środkowego 500-go wiersza i skrajnego 50-go wiersza. Jak widać w różnych wierszach sygnały intensywności interferogramu powierzchni kulistej różnią się nie tylko poziomem natężenia, ale i kształtem.

Na bazie transformaty Hilberta według równania (19) wyznaczono estymatę obwiedni. Dla oszacowania dokładności estymacji obwiedni wyliczono błąd średniokwadratowy:

$$(20) \quad \sigma_{env} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N [\tilde{E}_i(T) - E_i(T)]^2}}{N \cdot \max[E(T)]} \cdot 100\%$$

gdzie  $E_i$  i  $\tilde{E}_i$  – wartości funkcji obwiedni i jej estymacji dla  $i$ -tej próbki sygnału intensywności;  $N$  – ilość próbek w sygnale.

Błąd estymacji obwiedni bezpośrednio przekłada się na dokładność rekonstrukcji powierzchni metodą estymacji obwiedni.



Rys. 4. Sygnały intensywności natężenia światła interferogramu powierzchni kulistej z estymatorem obwiedni dla wierszy 500 (a) i 50 (b)

Reasumując, rekonstrukcja profilu powierzchni z interferogramu światła białego metodą estymacji jej obwiedni przewiduje wykonanie następujących kroków:

- wprowadzenie danych interferogramu  $I(T)$  oraz parametrów źródła światła  $\lambda_0$  i  $\Delta\lambda$ ,
- wyeliminowanie składowej stałej  $I_0$  z sygnału intensywności,
- wyznaczenie za pomocą dyskretnej transformaty Hilberta składowej kwadraturowej  $I_Q(T)$ ,
- estymację obwiedni  $\tilde{E}(T)$  według wzoru (19),
- wyliczenie profilu powierzchni z estymaty obwiedni  $\tilde{E}(T)$  według wzoru

$$(21) \quad T = \frac{\lambda_0^2}{2 \cdot \Delta\lambda} \left\{ -\ln \left[ \frac{\tilde{E}(T)}{I_M} \right] \right\}^{1/2}$$

Na rys. 3 i 4 pogrubioną linią przerywaną przedstawiono estymatę obwiedni uzyskane za pomocą transformaty Hilberta. W przypadku powierzchni pochyłej, estymata obwiedni sygnału intensywności wyliczona za pomocą transformaty Hilberta estymowana jest dość dokładnie – błąd średniokwadratowy wynosi  $0,21\%$ . Źródłem tego błędu jest przeciek widma, czyli niedokładność samej dyskretnej transformaty Hilberta.

Dla powierzchni kulistej estymata obwiedni jest wyliczana z dużym błędem (na przykład wartość błędu średniokwadratowego wynosi  $8,5\%$  dla 500-go wiersza i  $24,67\%$  dla 50-go wiersza). Na rys. 4 nawet wizualnie są widoczne wahania obwiedni, przy czym poziom tych wahań wzrasta w centralnej części interferogramu. Badania wykazały, że przyczyną błędnej estymacji obwiedni jest zmiana częstotliwości fali nośnej. W miarę przybliżania się

do centrum interferogramu częstotliwość fali nośnej maleje i wzrasta efekt nałożenia widm fali nośnej i jej obwiedni.

Ponieważ rekonstrukcja powierzchni kulistej metodą estymacji obwiedni interferogramu nie jest dokładna, niżej zaprezentowano kolejne trzy metody bazujące na transformacie Hilberta oraz zbadano ich dokładność.

### Rekonstrukcja profilu powierzchni kulistej metodą normalizacji interferogramu

Z modelu interferogramu światła białego wynika możliwość rekonstrukcji profilu powierzchni, czyli wyznaczenie parametru  $T$  z pełnej fazy  $\Phi(T)$  fali nośnej (3). Jednak zawartość w interferogramie obwiedni  $E(T)$  w postaci funkcji Gaussa komplikuje zagadnienie rekonstrukcji profilu powierzchni, gdyż zanik amplitudy nośnej powoduje wzrost błędów rekonstrukcji. Dla zapewnienia inwariantności wyników rekonstrukcji obwiedni należy przeprowadzić normalizację interferogramu poprzez jej przeskalowanie:

$$(22) \quad I_{norm} = \frac{I(T)}{\bar{E}(T)} \approx \cos\left(\frac{4 \cdot \pi}{\lambda_0} T\right),$$

gdzie  $I_{norm}$  – unormowany sygnał intensywności;  $I(T)$  – sygnał intensywności z wyeliminowaną składową stałą;  $\bar{E}(T)$  – estymata funkcji obwiedni.

Po unormowaniu interferogramu różnicę dróg optycznych można wyliczyć ze wzoru:

$$(23) \quad T = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi} \arccos(I_{norm})$$

Normalizacja interferogramu według równania (22) eliminuje obwiednię, pozostawiając jedynie nietłumioną falę nośną, a wyznaczenie rozwiniętej pełnej fazy umożliwia na podstawie wzoru (23) wyliczyć różnicę dróg optycznych, czyli pozwala na rekonstrukcję profilu powierzchni. Procedura rozwinięcia fazy koryguje fazę przy przekroczeniu wartości  $\pi$  radianów poprzez dodawanie  $\pm 2\pi$ , eliminując w ten sposób skoki fazy.

Rekonstrukcja profilu powierzchni metodą normalizacji obwiedni interferogramu światła białego wymaga uzupełnienia metody estymacji obwiedni o kilka dodatkowych kroków, a więc obejmuje kolejno:

- wprowadzenie danych interferogramu  $I(T)$  oraz parametrów źródła światła  $\lambda_0$  i  $\Delta\lambda$ ,
- wyeliminowanie składowej stałej  $I_0$ ,
- wyznaczenie za pomocą dyskretnej transformaty Hilberta składowej kwadraturowej  $I_Q(T)$ ,
- estymację obwiedni  $\hat{E}(T)$  według wzoru (19),
- unormowanie interferogramu według wzoru (22),
- obliczanie fazy nośnej na bazie funkcji arc cosinus według wzoru (23),
- rozwinięcie fazy i wyliczanie profilu powierzchni,
- wizualizację powierzchni rekonstruowanej.

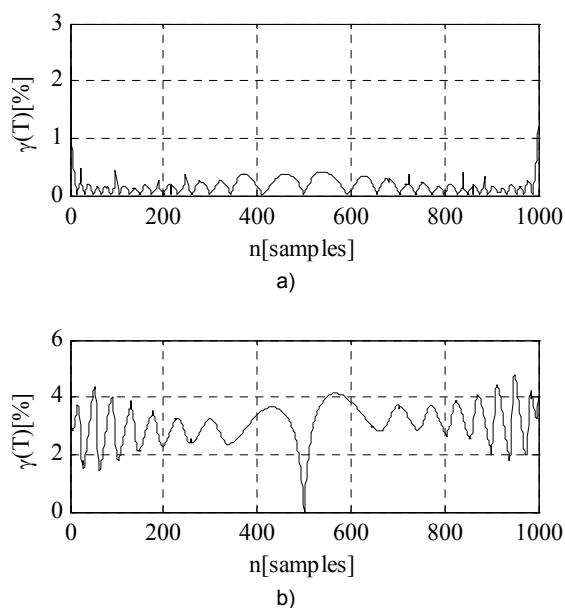
W celu oszacowania błędów rekonstrukcji był wyliczany błąd względny oraz błąd średniokwadratowy według następujących wzorów

$$(24) \quad \gamma(T) = \frac{|T_{rec}(i) - T_{origin}(i)|}{\max(T_{origin}) - \min(T_{origin})} \cdot 100\%$$

$$(25) \quad \sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N [T_{rec}(i) - T_{origin}(i)]^2}}{N \cdot [\max(T_{origin}) - \min(T_{origin})]} \cdot 100\%$$

gdzie  $T_{rec}(i)$  i  $T_{origin}(i)$  – wysokość profilu rekonstruowanej i symulowanej powierzchni w  $i$ -tym punkcie;  $N$  – liczba próbek interferogramu w jednej linii.

Na rysunku 5 przedstawiono wykresy błędów rekonstrukcji powierzchni kulistej metodą normalizacji interferogramu dla 500-go i 50-go wiersza.



Rys. 5. Błąd rekonstrukcji profilu powierzchni kulistej dla 500-go wiersza (a) i 50-go wiersza (b)

Maksymalny błąd rekonstrukcji profilu powierzchni kulistej wynosi dla 500-go wiersza 2,2%, a dla 50-go wiersza – 4,76%. Wartości błędu średniokwadratowego wynoszą odpowiednio 0,24% i 3,18%.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić małą wrażliwość tej metody rekonstrukcji powierzchni od błędów estymacji obwiedni (błąd rekonstrukcji kilkakrotnie mniejszy w porównaniu z błędem estymacji obwiedni).

### Rekonstrukcja profilu powierzchni kulistej metodą estymacji chwilowej fazy interferogramu

Znajomość rzeczywistego sygnału intensywności  $I(T)$  i jego przybliżonej wersji urojonej  $I_Q(T)$ , uzyskanej za pomocą dyskretnej transformaty Hilberta umożliwia estymację nie tylko obwiedni, ale też chwilowych wartości fazy sygnału intensywności według wzoru

$$(26) \quad \Phi(T) = \arctan\left[\frac{I_Q(T)}{I(T) - I_0}\right]$$

a po przeskalowaniu, pozwala na wyznaczenie profilu powierzchni

$$(27) \quad T = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi} \arctan\left[\frac{I_Q(T)}{I(T) - I_0}\right]$$

Pozorna łatwość tej metody w praktyce stwarza pewne trudności obliczeniowe:

- dzielenie przez zerową wartość sygnału intensywności z wyeliminowaną składową stałą,
- niejednoznaczność funkcji arc tangens dla kątów znajdujących się w I i III lub II i IV ćwiartce,
- niejednoznaczność spowodowana okresowością funkcji arc tangens, co wyraża się skokami fazy w zakresie  $\pm\pi/2$ .

Dzielenie przez zero w argumentie funkcji arc tangens prowadzi do niejednoznacznego wyznaczenia jej wartości  $+\pi/2$  czy  $-\pi/2$ . Należy więc dodatkowo analizować znak części urojonej: dla dodatnich wartości należy przyjąć wartość  $+\pi/2$  radianów, a dla ujemnych odpowiednio  $-\pi/2$  radianów.

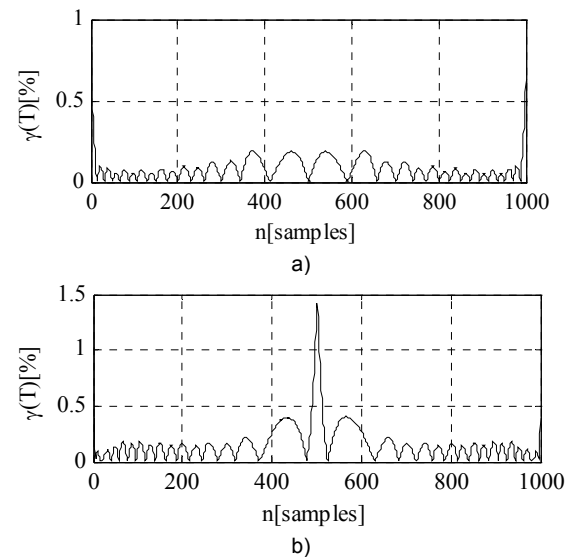
Dla rozwiązania drugiego problemu niejednoznaczności funkcji arc tangens w parzystych i nieparzystych ćwiartkach należy po wyczeniu fazy przeanalizować znaki części rzeczywistej i urojonej. Jeżeli obie składowe są ujemne, to od uzyskanej fazy należy odjąć  $\pi$  radianów, jeżeli część rzeczywista jest ujemna, a urojona dodatnia – należy dodać  $\pi$  radianów.

Rozwiązanie problemu spowodowanego okresowością funkcji arc tangens wymaga tak zwanego rozwinięcia fazy (ang. phase unwrapping). Ta specjalna procedura zapewnia ciągłość (bezskokowość) zmiany fazy i jest realizowana w następujący sposób: do wyliczonej wartości fazy dodaje się lub odejmuje się iloczyn  $2\pi$  z pewną liczbą całkowitą minimalizującą różnicę między sąsiednimi wartościami fazy [17].

Reasumując, rekonstrukcja profilu powierzchni metodą estymacji chwilowych wartości fazy zawiera takie czynności:

- wprowadzenie danych interferogramu  $I(T)$  oraz parametrów źródła światła  $\lambda_0$  i  $\Delta\lambda$ ,
- wyeliminowanie składowej stałej  $I_0$ ,
- wyznaczenie za pomocą dyskretnej transformaty Hilberta składowej kwadraturowej,
- wylizanie funkcji arc tangens z uwzględnieniem niejednoznaczności tej funkcji,
- rozwinięcie fazy i wylizanie profilu powierzchni,
- wizualizację powierzchni rekonstruowanej.

Na rysunku 6 przedstawiono wyniki badań dokładności rekonstrukcji profilu powierzchni kulistej metodą estymacji chwilowej wartości fazy.



Rys. 6. Błąd rekonstrukcji profilu powierzchni kulistej dla 500-go wiersza (a) i 50-go wiersza (b)

Maksymalny błąd rekonstrukcji profilu powierzchni kulistej wynosi dla 500-go wiersza 0,83%, a dla 50-go wiersza 1,4%. Wartości błędu średniokwadratowego dla tych przypadków wynoszą odpowiednio 0,11% i 0,2%.

Metoda estymacji fazy wykazała większą dokładność w porównaniu z metodami opartymi na estymacji obwiedni. Jednak wadą tej metody jest złożoność jej praktycznej implementacji na różnych platformach obliczeniowych.

### Rekonstrukcja profilu powierzchni metodą logarytmowania interferogramu w postaci zespolonej

Idea tej metody polega na uformowaniu zespolonej wersji interferogramu poprzez dodanie dopełnienia kwadraturowego  $I_Q(T)$  uzyskanego za pomocą transformaty Hilberta:

$$(28) \quad \hat{I}(T) = I(T) + j \cdot I_Q(T) = E(T) \cdot e^{j\Phi(T)},$$

gdzie  $E(T)$  – obwiednia amplitudy oraz  $\Phi(T)$  – pełna faza sygnału intensywności.

Logarytmując ten wzór uzyskujemy

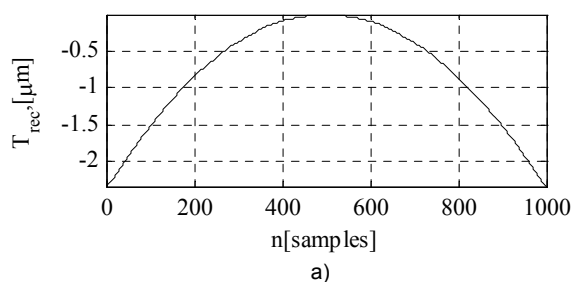
$$(29) \quad \ln[\hat{I}(T)] = \ln[E(T) \cdot e^{j\Phi(T)}] = \underbrace{\ln[E(T)]}_{real} + \underbrace{j \cdot \Phi(T)}_{imag}$$

Stąd w prosty sposób z części urojonej wyrazu (29) można wyznaczyć pełną fazę fali nośnej

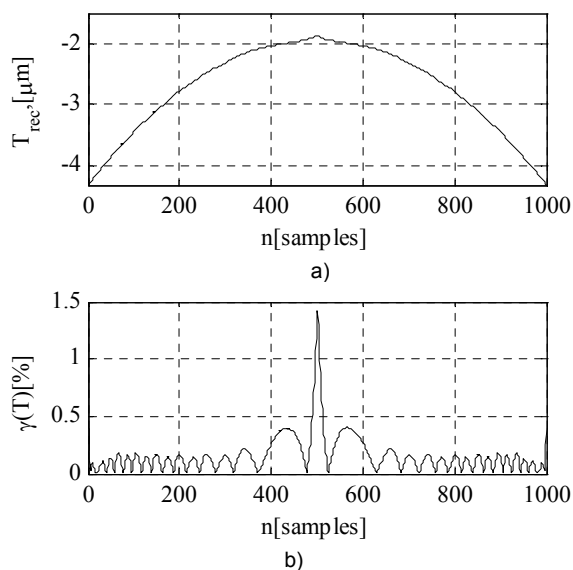
$$(30) \quad T = \frac{\lambda_0}{4 \cdot \pi} \cdot \text{Im}[\ln(\hat{I})].$$

Wykorzystując tę metodę należy:

- wprowadzić dane interferogramu  $I(T)$  oraz parametry źródła światła  $\lambda_0$  i  $\Delta\lambda$ ,
- wyeliminować składową stałą  $I_0$ ,
- uformować zespolony interferogram za pomocą dyskretnej transformaty Hilberta,
- zlogarytmować zespolony interferogram  $\hat{I}(T)$ ,
- wyznaczyć profil powierzchni poprzez przeskalowanie części urojonej według wyrazu (30),
- wizualizować powierzchnię rekonstruowaną.



Rys. 7. Profil powierzchni rekonstruowanej (a) i błąd rekonstrukcji (b) dla 500-go wiersza interferogramu



Rys. 8. Profil powierzchni rekonstruowanej (a) i błąd rekonstrukcji (b) dla 50-go wiersza interferogramu

Na rysunku 7 przedstawiono kształt profili powierzchni rekonstruowanej (a) i błąd rekonstrukcji (b), uzyskane na podstawie analizy 500-go wiersza interferogramu, zaś na rysunku 8 podano analogiczne wielkości uzyskane na podstawie analizy 50-go wiersza interferogramu.

Wyniki rekonstrukcji metodą estymacji chwilowych wartości fazy oraz logarytmowania zespolonego interferogramu są podobne, lecz realizacja ostatniej metody jest stosunkowo prostsza.

### Wnioski

W artykule podano model matematyczny sygnału intensywności interferogramu światła białego oraz opisano istotę zagadnienia rekonstrukcji profilu powierzchni.

Przedstawiono cztery metody rekonstrukcji profilu powierzchni z interferogramu światła białego bazujące się na transformacie Hilberta. Pierwsza metoda wykorzystująca estymator obwiedni interferogramu wykazała dużą dokładność rekonstrukcji profilu liniowego, odpowiadającego powierzchni pochyłej (pomiaru małych kątów). W przypadku rekonstrukcji profili nieliniowych, na przykład powierzchni kulistej, towarzyszą tej metodzie duże błędy, źródłem których jest nakładanie się widm fali nośnej i obwiedni w zakresie niskich częstotliwości.

Poprawę dokładności rekonstrukcji profili powierzchni nieliniowych wykazała metoda normalizacji interferogramu – maksymalny błąd rekonstrukcji w środku powierzchni wynosił 2,2 %, a błąd średniokwadratowy wynosił 0,24%.

Dodatkową poprawę dokładności oferuje metoda bazująca na obliczaniu fazy sygnału nośnego. Metoda ta, w przypadku rekonstrukcji powierzchni kulistej, oparta na estymacji chwilowych wartości fazy nośnej, dla punktu w centrum dała maksymalny błąd 0,83 %, a błąd średniokwadratowy 0,11 %. Jednak wadą tej metody jest złożoność obliczeniowa. Ostatnia z opisanych metod rekonstrukcji wykorzystująca logarytmowanie interferogramu w postaci zespolonej pozwala uzyskać podobną dokładność rekonstrukcji jak metoda z obliczaniem fazy sygnału nośnego. Jej zaletą jest stosunkowo prosta realizacja.

**Autorzy:** dr hab. inż. Maria Wrzuszczak, Politechnika Opolska, Instytut Automatyki i Informatyki, e-mail: [m.wruszczak@po.opole.pl](mailto:m.wruszczak@po.opole.pl); Anna Khoma, doktorantka Narodowego Uniwersytetu „Politechnika Lwowska”, e-mail: [avkhoma@gmail.com](mailto:avkhoma@gmail.com)

### LITERATURA

- [1] Goodwin E.P., Wyant J.C. (2006). *Field Guide to Interferometric Optical Testing*, Washington: SPIE Press. (2006)
- [2] Whitehouse D. J., Surface metrology, *Meas. Sci. Technol.*, (1997), No.8, 955–972
- [3] Kapłonek W., Łukianowicz C., Zastosowanie koherencyjnej interferometrii korelacyjnej do pomiarów topografii powierzchni, *Przegląd Elektrotechniczny*, 78 (2010), nr.10, 43-46
- [4] Wyant J.C., White light interferometry, In *Proc. SPIE 2002*, Vol. 4737, (2002), 98-107
- [5] Legande-Saenz R., Rodriguez-Vera R., Espinosa-Romero A. Dynamic 3-D shape measurement method based on quadrature transform, *Optics Express* (2010), vol.18, No. 3, 2639-2645
- [6] Chen F., Brown G.M., Song M. Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods, *Opt. Eng.* 39, (2000), 10-22
- [7] Muhamedsalih H.M., Investigation of wavelength scanning interferometry for embedded metrology”, Ph.D. thesis, Univ. of Huddersfield, (2013)
- [8] Magalhaes P., Neto, P., Magalhães, C., New carré equation. *Metrol. Meas. Syst.* 17(2), (2010), 173–194
- [9] Adamczak S., Makiela, W., Stępień, K., Investigating advantages and disadvantages of the analysis of a geometrical surface structure with the use of Fourier and wavelet transform. *Metrol. Meas. Syst.* 17(2), (2010), 233–244
- [10] Stadnyk B., Manske E., Khoma A., State and prospects of computerized systems monitoring the topology of surfaces, based on white light interferometry. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 4(1), (2014), 75-80
- [11] Abdul-Rahman, H., Three-dimensional Fourier Fringe analysis and phase unwrapping. Ph.D. thesis. Liverpool John Moores University, (2007)
- [12] Novak J. Computer analysis of interference fields using Matlab, *MATLAB conference*, (2002)
- [13] Cincio, R., Kacalak, W., Łukianowicz, C. System Talysurf CCI 6000 – metodyka analizy cech powierzchni z wykorzystaniem TalyMap Platinum. *PAK*. 54(4), (2008), str. 187-191.
- [14] Khoma, A. (2014). Method of surface reconstruction from white light interferogram based on Hilbert transform. *Computer Science and Information Technology*, Lviv Polytechnic National University. No 800. 168-175. (in Ukrainian)
- [15] Smith J.O., Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) CCRMA, Stanford, (2002)
- [16] Zieliński T.P., Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów, ANTYKWA, Kraków, (2002)
- [17] Smith S.W., Digital signal processing. A practical guide for engineers and scientists, Elsevier Science, (2003)