

## Wpływ rozmiaru siatki różnicowej stosowanej przy analizie rozkładu pola elektromagnetycznego na poprawność wyników uzyskanych metodą numeryczną FDTD

**Streszczenie.** Celem publikacji jest szczegółowa analiza zależności pomiędzy przyjętym rozmiarem komórki Yee stosowanym w metodach różnicowych (np. FDTD, FDFD) a wiarygodną wartością rozwiązania uzyskanego metodą numeryczną. Ważnym kryterium wskazanych metod jest stworzenie dyskretnego modelu siatkowego badanego modelu, złożonego z komórek elementarnych i obliczenie rozkładów pola przy założeniu liniowej aproksymacji zmian. Na przykładzie obszaru zawierającego ścianę wykonaną z nieidealnego dielektryka (beton zwykły) porównano wartości natężenia pola elektrycznego wyznaczone metodą różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD) z wynikami otrzymanymi przy użyciu zależności analitycznych. W analizie uwzględniono także wpływ grubości ściany oraz zmienność parametrów elektrycznych opisujących beton (tj. konduktywność oraz przenikalność elektryczna). Analiza dotyczyła jednej z powszechnie stosowanych częstotliwości w lokalnych sieciach bezprzewodowych WiFi ( $f = 2.4$  GHz). Otrzymane wyniki analizy pozwalają na obserwację wielkości błędu przy jednoczesnym zwiększaniu siatki różnicowej. Dodatkowo przedstawiono wartości natężenia pola elektrycznego dla rozpatrywanych konstrukcji zawierających ścianę wykonaną z betonu przy zmiennych wartościach elektrycznych.

**Abstract.** The aim of this publication is a detailed analysis of the relationship between the adopted size Yee cell used in the differential methods (eg. FDTD, FDFD) and reliable value of solutions obtained by numerical method. An important criterion chosen method is to create a discrete mesh model of the analysed model composed of individual cells and calculation of the field distribution, assuming a linear approximation of changes. As example, the area comprising a wall made of non-ideal dielectric (concrete) compared to the intensity of the electric field as determined by the finite-difference time-domain method (FDTD) with results obtained using according to analytical method. Also was analyzed the impact of the wall thickness and the variability of electrical parameters describing concrete (conductivity and electrical permittivity). The presented analysis was connected with one of standard frequencies generated by a wireless communication system ( $f = 2.4$  GHz). The obtained results of the analysis allow for observation error rate while increasing the mesh differential. (Influence of the size of the differential mesh used in the analysis of the electromagnetic field distribution on the correctness of the results obtained by the numerical method FDTD).

**Słowa kluczowe:** metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu (FDTD), propagacja fal elektromagnetycznych, metoda różnic skończonych w dziedzinie częstotliwości (FDFD), komunikacja bezprzewodowa, materiały budowlane.

**Keywords:** finite difference time domain method (FDTD), electromagnetic waves propagation, finite difference frequency domain method (FDFD), wireless communication, building materials.

### Wstęp

Na technologie komunikacji bezprzewodowej składają się rozwiązania zróżnicowane pod względem częstotliwości, czy też zasięgu działania. Z punktu widzenia modelowania zjawisk elektromagnetycznych w tych układach, za główną miarę wielkości analizowanego modelu należy przyjąć wielkość liniowych rozmiarów układu w stosunku do długości propagującej fali elektromagnetycznej. Wybór metody analizy jest podyktowany względną wielkością modelu i wynikających z tego przybliżeń w odwzorowaniu zjawisk fizycznych.

Wybór algorytmu obliczeniowego wymaga rozpatrzenia potrzeb i ograniczeń związanych ze specyfiką analizy zjawisk polowych w systemach transmisji bezprzewodowej. Główne czynniki determinujące zastosowanie metod numerycznych pozostają współzależne i mają w znacznym stopniu charakter przeciwstawny. Klasycznym przykładem jest sprzeczność między zwiększeniem wielkości modelu przy zachowaniu oczekiwanej precyzji odwzorowania struktury materiałowej a dokładnością modelowania rzeczywistych układów. Przeciwnością wskazywanych czynników ulegają uwypukleniu przy dążeniu do analizy coraz większych modeli. Również zaczyna pełnić ważną rolę czynnik związany z kosztem numerycznym obliczeń.

Zagadnienia propagacji fal elektromagnetycznych w obszarach zawierających konstrukcje budowlane należą do grupy problemów otwartych. Pomimo względnie małego zasięgu działania lokalnych systemów komunikacji bezprzewodowej (np. w obrębie budynków), odtworzenie zjawisk polowych związane jest z odwzorowaniem zjawisk propagacji fal w otwartym, teoretycznie nieskończonym obszarze. W systemach lokalnej komunikacji bezprzewodowej (np. WiFi) granice rozchodzenia się fal nie są ograniczone do obszaru budynku, stąd należy

uwzględnić złożoność i wielkość rozpatrywanego obszaru, jak również przyjąć takie warunki brzegowe, które dobrze odwzorują modelowany układ.

Zagadnienia związane z funkcjonowaniem sieci bezprzewodowych i rozkładem pola elektromagnetycznego wymagają rozpatrzenia wielu zjawisk zachodzących przy propagacji fal w złożonych układach. W tym celu, oprócz metod empirycznych [4] mogą być stosowane metody:

- analityczne [4];
- wykorzystujące przybliżenia optyki geometrycznej (np. techniki śledzenia promieni) [11];
- różnorodne metody numeryczne bazujące na rozwiązaniu zagadnień fizyki falowej (np. FDTD, FDFD) [1, 3, 6, 7, 8].

Konieczne przybliżenia stosowane przy konstruowaniu modelu, jak również poziom błędów wnoszonych przy wykonywaniu obliczeń stanowią główne czynniki decydujące o wyborze algorytmu obliczeń.

W artykule, na podstawie przykładowego modelu zawierającego dwa rodzaje ścian wykonanych z jednorodnego materiału przedstawiono wpływ doboru rozmiaru siatki różnicowej na poprawność wyników. Uzyskane metodą różnicową (FDTD) wartości natężenia pola elektrycznego zostały zweryfikowane przy użyciu metody analitycznej. Na tej podstawie oszacowano wartość błędu obliczeń oraz określono optymalny rozmiar komórki Yee w tego typu zagadnieniach.

### Model zastosowany do analizy doboru rozmiaru siatki różnicowej metodą FDTD

Przedmiotem analizy jest obszar  $\Omega_S$ , w którym występuje materiał homogeniczny pod względem budowy wewnętrznej i zakładanych właściwości materiałowych, tj.

zwykły beton (rys. 1). Ze względu na grubość ściany analizowano dwa warianty:

- ścianę jednowarstwową o grubości  $b = 0,12$  m;
- ścianę dwuwarstwową,  $b = 0,24$  m.

Założono, że z obu stron ściany znajduje się otwarta przestrzeń o właściwościach powietrza, pozbawiona innych elementów, które mogą zaburzać propagującą falę elektromagnetyczną i wpływać na rozkład pola w układzie.

Ze względu na jednorodność struktury materiałowej, szerokość obszaru całego modelu mierzona wzdłuż osi  $Ox$  może przyjmować dowolne wartości. W wykonywanych obliczeniach założono, że szerokość modelu wynosi 0,75 m.



Rys.1. Geometria rozpatrywanego modelu stosowana przy obliczeniach układów z materiałem jednorodnym

Zróznicowanie zawartości procentowej poszczególnych składników betonu oraz zmienność wartości parametrów elektrycznych betonu powoduje, iż do analizy przyjęto zakres wartości względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r' \in \{5, 6, 7, 8\}$  [2].

Wymuszenie pola w układzie stanowiła harmoniczna fala płaska spolaryzowana liniowo, propagująca w kierunku zgodnym z osią  $Oy$  ( $\mathbf{k} = \mathbf{1}_y$ ) [1, 5]

$$(1) \quad \mathbf{E}(x, y, t) = E_z \bar{\mathbf{1}}_z = \sin(\omega t) \cdot \mathbf{1}(t) \cdot \bar{\mathbf{1}}_z.$$

Zjawiska propagacji fal w otwartej przestrzeni zostały odwzorowane przez przyjęcie warunków absorpcyjnych PML (ang. *perfectly matched layer*) na krawędziach prostokątnych do kierunku propagacji fali płaskiej [8, 10]. Głównym ograniczeniem ich przyjęcia jest konieczność tworzenia dodatkowego obszaru, który służy do odwzorowania propagacji fali w nieskończoność. Skutkuje to zwiększeniem rozmiaru modelu poprzez większą liczbę oczek siatki różnicowej. Tworzona warstwa PML ma za zadanie wyłumić wnikającą falę poprzez stopniowy, dobrany wzrost konduktywności.

Wymiary ściany w kierunku prostokątnym do kierunku propagacji fali (szerokość ściany oraz jej wysokość), są znacznie większe od długości fali w powietrzu ( $\lambda_0 = 0,125$  m przy  $f = 2,4$  GHz). Zatem, pomijając zjawiska zachodzące na krańcach ściany, w pobliżu jej krawędzi lub na styku z inną ścianą, możliwe było:

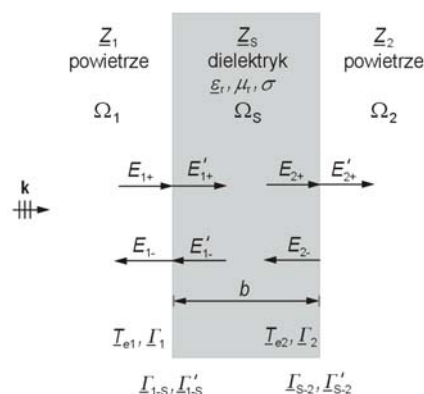
- wykonanie dwuwymiarowego modelu numerycznego rozpatrywanego układu;
- zmniejszenie wielkości modelu poprzez zastosowanie odpowiednich warunków brzegowych, m.in. warunków okresowości rozkładu pola gwarantujących rozwinięcie obszaru i powtarzalność (okresowość) rozkładu pola.

Przyjęte założenia pozwalają na określenie wpływu rozpatrywanego materiału na rozkład pola elektromagnetycznego, w układzie odosobnionym, z pominięciem innych czynników. Wyniki tej analizy zostały szczegółowo zaprezentowane w publikacji [2].

## Rozwiązanie analityczne

W przypadku ścian o jednorodnej strukturze materiałowej, przy prostokątnym padaniu fali EM na granicę ośrodków (rys. 1, 2), opis zachodzących zjawisk odpowiada klasycznemu zagadnieniu propagacji fali płaskiej w otwartej przestrzeni i jej oddziaływaniu z płytą wykonaną z dielektryka [12]. Ze względu na harmoniczną zależność pól od czasu, wektory pola elektrycznego fali padającej  $E_{1+}$ , przechodzącej  $E_{1'}$  oraz odbitej  $E_{1-}$  zapisane są w postaci zespolonej. Układ testowy (rys. 2) sprowadza się do modelu warstwowego jednowymiarowego (rys. 1), w którym obszar jednorodnego, izotropowego dielektryka stratnego  $\Omega_S$  o szerokości  $b$ , jest otoczony powietrzem. Właściwości otaczającego ośrodka są scharakteryzowane za pomocą impedancji falowej [5, 12]

$$(2) \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega.$$



Rys.2. Schemat układu z falą płaską padającą prostopadle na dielektryk (ścianę)

Rozpatrywane jednorodne materiały budowlane kategoryzuje się jako dielektryki nieidealne, o niskiej stratności. Uwzględniając efektywną przenikalność elektryczną dielektryka stratnego (gdzie w definicji materiału zostały uwzględnione zjawiska wywołane prądami przewodzenia i przesunięcia)

$$(3) \quad \underline{\epsilon}_{ef}(\omega) = \underline{\epsilon} + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} = \epsilon' - j \left( \epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right),$$

jego impedancja falowa wyrażona jest za pomocą wzoru

$$(4) \quad \underline{Z}_S = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_r' - j \left( \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon_r'' \right)}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r'}} \cdot \left( 1 + j \left( \frac{\sigma + 2\pi f \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r'')}{2 \cdot (2\pi f \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r'))} \right) \right).$$

Przy prostokątnym padaniu fali na granicę materiałów współczynnik transmisji pola elektrycznego w obszarze  $\Omega_2$  wyraża się wzorem [12]

$$(5) \quad \underline{T}_c = \frac{\underline{T}_{e1} \cdot \underline{T}_{e2} \cdot e^{-jk b}}{1 + \underline{T}_1 \cdot \underline{T}_2 \cdot e^{-2jk b}},$$

przy czym odpowiednie współczynniki pola wynoszą

$$(6) \quad \underline{T}_{e1} = 1 + \underline{T}_1 = 1 + \frac{\underline{Z}_S - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_1},$$

$$(7) \quad \underline{T}_{e2} = 1 + \underline{T}_2 = 1 + \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_S}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_S},$$

zaś liczba falowa opisana jest wzorem

$$(8) \quad \underline{k} = \left( 2\pi f \sqrt{(\mu_0 \mu_r) \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r')} \right) \cdot \left( 1 - j \left( \frac{\sigma + 2\pi f \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r'')}{2 \cdot (2\pi f \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r'))} \right) \right)$$

Zależność (5) daje możliwość weryfikacji wyników otrzymanych przy obliczeniach numerycznych z wykorzystaniem metody FDTD (ang. *Finite-Difference Time-Domain*) oraz FDFD (ang. *Finite-Difference Frequency-Domain*). Zastosowanie wzoru (5) ogranicza się do przypadków z materiałami izotropowymi, jednorodnymi, m.in. beton w ujęciu makroskopowym. Otrzymane maksymalne wartości natężenia pola elektrycznego w obszarze za ścianą są podstawą do wyznaczenia współczynnika transmisji pola bezpośrednio, na podstawie wzoru definicyjnego (5).

Na podstawie przedstawionych zależności analitycznych możliwe jest również określenie wartości współczynnika odbicia na granicy ośrodków  $\Omega_1$  oraz  $\Omega_2$

$$(9) \quad \Gamma_{1-s} = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 \cdot e^{-2jk_b}}{1 + \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot e^{-2jk_b}},$$

przy czym wektory pola elektrycznego fali padającej ( $E_{1+}$ ) oraz odbitej ( $E_{1-}$ ) zostały wyznaczone na podstawie zapisu zespolonego [12].

#### Analiza numeryczna

Do analizy rozkładu pola elektromagnetycznego wewnątrz złożonych konstrukcji budowlanych często stosuje się metody różnicowe, w tym schemat w dziedzinie czasu (FDTD) oraz w dziedzinie częstotliwości (FDFD). Istotą wskazanych metod jest stworzenie dyskretnego modelu siatkowego badanego obiektu, złożonego z komórek elementarnych (zwanymi komórkami Yee) i obliczenie rozkładów pola przy założeniu liniowej aproksymacji zmian [1, 6, 7, 8, 9].

Określenie zmian pola w obszarze modelu  $\Omega$  jest wykonywane przy założeniu odpowiedniego, zdefiniowanego rozmieszczenia składowych wektorów natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$  oraz magnetycznego  $\mathbf{H}$ . W metodach różnicowych przyjmuje się konstrukcję z przesuniętą siatką dla składowych pola elektrycznego oraz magnetycznego. Struktura siatki odzwierciedla fizyczną interpretację zjawisk elektromagnetycznych oraz jest zgodna z koncepcją zaproponowaną przez K. S. Yee przy formułowaniu metody różnicowej w dziedzinie czasu [1]. Wyznaczane przestrzenne rozkłady wielkości fizycznych  $\{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z\}$  są przypisane w wybranych punktach obszaru  $(x, y, z)$ , przy uwzględnieniu dyskretnej, skończonej wielkości kroku całkowania po obszarze ( $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ ).

Ze względu na liniową aproksymację zmian pola w schemacie różnicowym, konstruowana siatka musi spełniać warunek Nyquista [1, 9]

$$(10) \quad \Delta_x \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Zależność (10) jest kryterium koniecznym ale nie dostatecznym przy tworzeniu modelu. Ze względu na efekty dyspersji numerycznej siatki różnicowej i dążenie do zwiększenia precyzji odwzorowania przestrzennego zmian pola, w praktyce przyjmuje się warunek

$$(11) \quad \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \leq \frac{\lambda}{10}.$$

Zachowanie warunku (11) ogranicza efekty dyspersji numerycznej do poziomu 15% w porównaniu do

rzeczywistych wartości pola w układach modelowych [1].

Wyznaczenie rozkładu pola wykonano przy użyciu metody FDTD [1, 3, 5, 7]. Analizę doboru rozmiaru siatki różnicowej wykonano na podstawie obserwacji maksymalnej wartości składowej  $E_z$  oznaczonej przez  $\max(E_z)$  w obszarze za ścianą. Uzyskane wyniki posłużyły do analizy wpływu rozmiaru siatki różnicowej na wartość błędu obliczeń numerycznych. Obszar modeli podlega dyskretyzacji przez wpisanie równomiernej siatki komórek Yee [1, 7, 8]. Niewłaściwe przyjęcie rozmiaru komórki Yee skutkuje mało dokładnym odwzorowaniem zjawisk w toku realizowanych obliczeń. Jest to jedna z głównych przyczyn niezgodności wyników uzyskanych numerycznie z rzeczywistymi wartościami. Zatem, dla wybranych dwóch wariantów ścian wyznaczono maksymalne wartości natężenia pola elektrycznego przy różnych rozmiarach komórki różnicowej  $\Delta_x = \Delta_y \in \{0,5, 1, 1,5, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mm. W tabeli 1 przedstawiono porównanie średniej ilości komórek Yee przypadającej na długość fali w dielektryku. Długość fali w betonie  $\lambda_b$  określono na podstawie zależności [1, 5]

$$(12) \quad \lambda_b = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r' \cdot \mu_r}}.$$

Uwzględniając cztery rozpatrywane wartości parametrów elektrycznych opisujących beton, długość drogi, jaką pokonują fale elektromagnetyczne wewnątrz jednowarstwowej ściany betonowej, przy  $f = 2,4$  GHz obejmuje przedział  $\langle 2,15, 2,71 \rangle \lambda_b$ . Natomiast wymiary elektryczne ściany dwuwarstwowej wynoszą  $\langle 4,29, 5,43 \rangle \lambda_b$ .

Tabela 1. Średnia liczba komórek Yee na długość fali ( $f = 2,4$  GHz)

Rozmiar komórki Yee $\Delta_x = \Delta_y$ [mm]	Przenikalność elektryczna względna:				
	betonu				powietrza
	$\varepsilon_r' = 5$	$\varepsilon_r' = 6$	$\varepsilon_r' = 7$	$\varepsilon_r' = 8$	$\varepsilon_r' = 1$
	Długość fali elektromagnetycznej w:				
	betonie $\lambda_b$ [m]				powietrze
	0,0559	0,051	0,0472	0,0442	0,125
0,5	111	102	94	88	250
1,0	56	51	47	44	125
1,5	35	34	31	29	83
2,0	28	25	23	22	62
3,0	18	16	15	14	41
4,0	14	13	12	11	31
5,0	11	10	9	8	25
6,0	9	8	7	7	20

Do analizy i weryfikacji wyników uwzględniono niewielkie wartości konduktywności betonu, które są stosowane przy opisie właściwości elektrycznych zwykłego betonu [2]. Wskazany zakres obejmował wartości  $\sigma \in \langle 0, 0,08 \rangle$  S/m.

W tworzonym modelu przykładowo przy  $f = 2,4$  GHz, w zależności od wartości przenikalności elektrycznej względnej betonu przy założeniu, że  $\Delta_x = \Delta_y = 1$  liczba komórek siatki różnicowej przypadających na długość fali w dielektryku wynosiła  $\langle 44, 56 \rangle$ . Niższa wartość odpowiada wartości  $\varepsilon_r' = 8$ . Zatem, w przyjętej konstrukcji modelu numerycznego, taka rozdzielczość siatki różnicowej gwarantowała spełnienie warunku (11).

#### Weryfikacja obliczeń numerycznych

Do ilościowego scharakteryzowania różnic pomiędzy wynikami otrzymanymi metodą numeryczną (FDTD) oraz wartości z zależności analitycznej, zastosowano parametr  $\delta_\Delta$  opisujący błąd obliczania wartości pola

$$(13) \quad \delta_\Delta = \left| \frac{\max(\text{wynik\_numeryczny})}{\max(\text{wynik\_analityczny})} \right| \cdot 100\%.$$

## Wyniki obliczeń

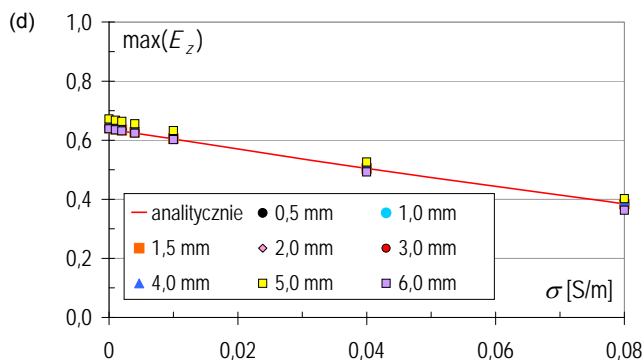
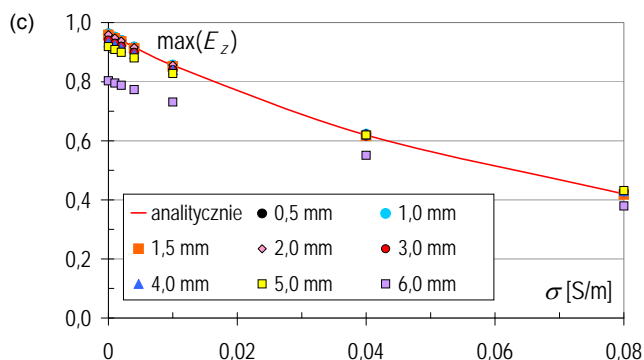
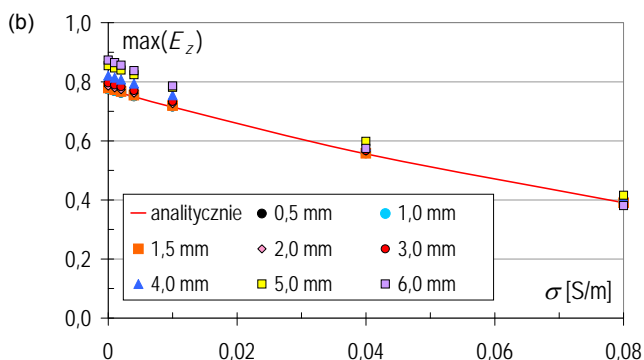
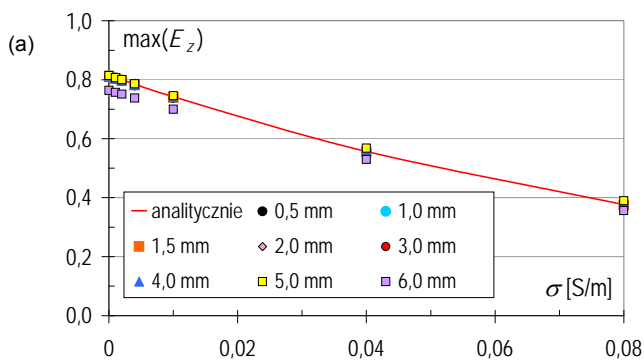
Na rysunkach 3-4 przedstawiono wartości składowej  $E_z$  otrzymane numerycznie przy różnym rozmiarze komórki Yee (oznaczone punktami) oraz przy użyciu opisanej metody analitycznej (czerwona linia).

W obliczeniach numerycznych, w celu uzyskania wiarygodnych wyników przyjmuje się, iż liczba komórek Yee przypadająca na długość fali w dielektryku nie powinna być mniejsza od 10 [7]. Zatem w modelu zawierającym ścianę jednowarstwową, wspomniane założenie jest spełnione, gdy  $\Delta_x = \Delta_y \leq 4$  mm (rys. 3). Błąd zależy jest od przyjętej wartości konduktywności oraz przenikalności elektrycznej względnej. Przykładowo przy:

- $\epsilon_r' = 5$  maksymalna wartość błędu  $\delta_\Delta$  wynosi 2,5%;
- $\epsilon_r' = 6$ ,  $\delta_\Delta = 6,2\%$ ;
- $\epsilon_r' = 7$ ,  $\delta_\Delta = 3,0\%$ ;
- $\epsilon_r' = 8$ ,  $\delta_\Delta = 2,7\%$ .

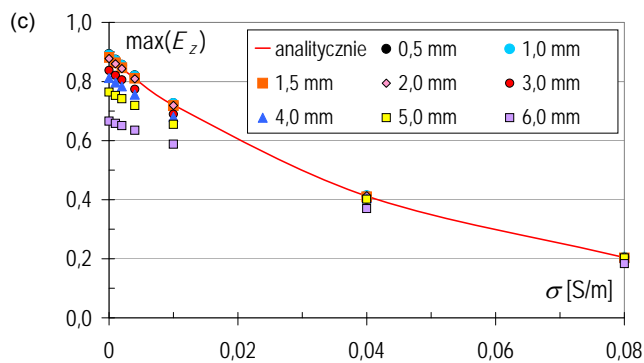
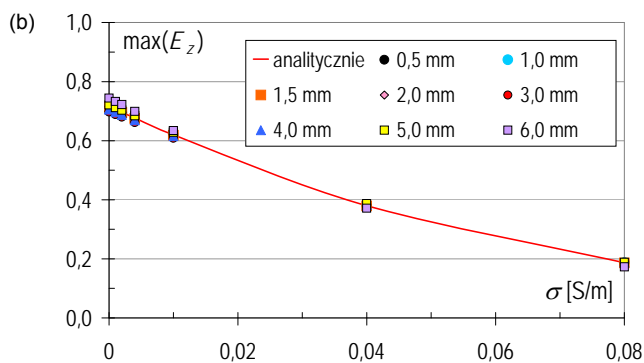
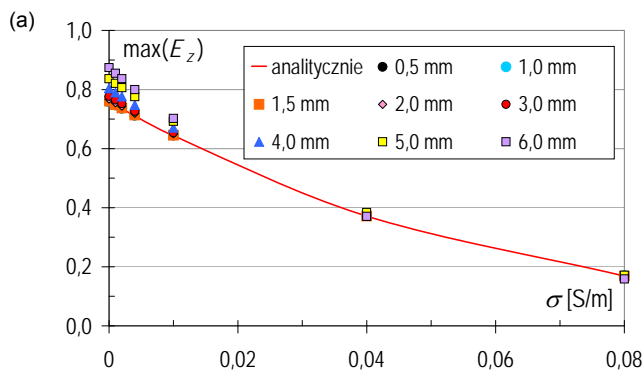
Przy uwzględnieniu najczęściej stosowanej wartości konduktywności betonu opisującej właściwości elektryczne ( $\sigma = 0,08$  S/m) zauważono, iż największa różnica ( $\delta_\Delta = 2,2\%$ ) wystąpiła przy  $\epsilon_r' = 6$ . W pozostałych przypadkach przyjmowanej wartości przenikalności elektrycznej względnej i  $\sigma = 0,08$  S/m różnice były mniejsze:

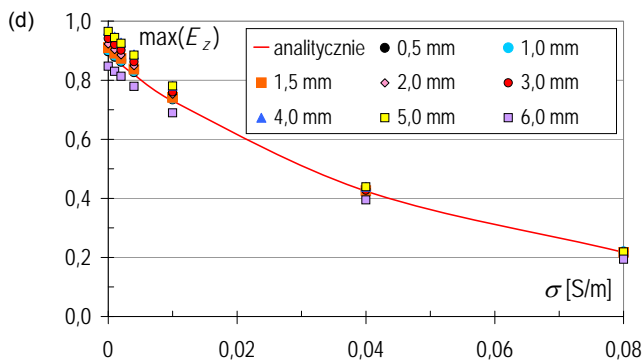
- $\epsilon_r' = 5$ ,  $\delta_\Delta = 1,6\%$ ;
- $\epsilon_r' = 7$ ,  $\delta_\Delta = 1,7\%$ ;
- $\epsilon_r' = 8$ ,  $\delta_\Delta = 1,4\%$ .



Rys.3. Zależność pomiędzy rozmiarem komórki Yee a uzyskaną dokładnością obliczeń dla modelu ściany jednowarstwowej, przy: (a)  $\epsilon_r' = 5$ , (b)  $\epsilon_r' = 6$ , (c)  $\epsilon_r' = 7$ , (d)  $\epsilon_r' = 8$

Na podstawie zaprezentowanych wykresów dla modelu ze ścianą jednowarstwową stwierdzono, że niezależnie od przyjętej wartości przenikalności elektrycznej względnej błąd obliczeń jest poniżej 1% oczywiście przy założeniu, że  $\Delta_x = \Delta_y \leq 1,5$  mm. Taka wartość błędu jest dopuszczalna i znacząco nie wpływa na wyniki uzyskane metodą numeryczną.





Rys.4. Zależność pomiędzy rozmiarem komórki Yee a uzyskaną dokładnością obliczeń, przy  $f = 2,4$  GHz dla modelu ściany dwuwarstwowej, przy: (a)  $\epsilon_r' = 5$ , (b)  $\epsilon_r' = 6$ , (c)  $\epsilon_r' = 7$ , (d)  $\epsilon_r' = 8$

Przy analizie modelu ze ścianą jednowarstwową, opisywana w [7] ilości komórek na długość fali powoduje błąd średnio rzędu ok. 3%. Natomiast trzykrotnie zwiększona liczba komórek Yee na jest bezpiecznym założeniem w celu uzyskania wiarygodnych wyników z obarczonym niewielkim błędem (1%).

Niestety wraz ze zwiększeniem modelu oraz częstotliwości konieczne jest uwzględnienie możliwości komputerów przetwarzających wiele niewiadomych rosnących wraz ze zmniejszeniem rozmiaru komórki [1].

Analiza układu ze ścianą dwuwarstwową wykazała, że jeżeli przyjęto  $\Delta_x = \Delta_y = 4$  mm, wartość błędu była w przedziale zależnym od konduktywności oraz przenikalności elektrycznej względnej:

- $\epsilon_r' = 5$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 1,4, 6,2 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 6$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 0,8, 1,4 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 7$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 0,2, 7,6 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 8$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 1,2, 9,1 \rangle$  %.

Natomiast przy założeniu, że  $\Delta_x = \Delta_y = 2$  mm wartość błędu (oprócz  $\epsilon_r' = 8$ ) nie przekroczyła 1,6%:

- $\epsilon_r' = 5$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 1,1, 1,6 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 6$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 0,1, 1,3 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 7$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 0,1, 1,1 \rangle$  %;
- $\epsilon_r' = 8$ ,  $\delta_\Delta \in \langle 1,6, 4,1 \rangle$  %.

Wyniki uzyskane przy analizie modelu ze ścianą dwuwarstwową wykazały podobne zależności, co do ostatecznie przyjętego rozmiaru komórki. Stwierdzono, że przy założeniu  $\Delta_x = \Delta_y \leq 1,5$  mm błąd nie przekroczył 1,5%.

### Podsumowanie

W artykule przedstawiono wpływ rozmiaru komórki Yee na dokładność obliczeń numerycznych. Uwzględniono dwie grubości ścian wykonanych z betonu zwykłego. Przeprowadzona analiza wskazuje, iż niewłaściwe przyjęcie założeń numerycznych rozpatrywanego modelu skutkuje nieprawidłowymi wynikami, które wpływają na wnioski z przeprowadzonej analizy.

Użycie metod analitycznych prowadzi do uzyskania rozwiązań w pełni bazujących na modelu matematycznym i obarczonych najmniejszym błędem. Ich stosowanie jest jednak możliwe w układach o prostej geometrii, przy idealizowaniu opisu. Ograniczenia metod analitycznych nie

pozwalają na rozpatrzenie zagadnień związanych z propagacją fal elektromagnetycznych w złożonych rzeczywistych konstrukcjach budowlanych. Ich użycie ogranicza się do sprawdzenia i porównania rozwiązania przybliżonego, otrzymanego z użyciem metod numerycznych, w przypadku prostych modeli testowych.

W przypadku złożonych konstrukcji, np. wykonanych z drażnionych cegieł jednocześnie dążenie do niewielkiej wartości błędu obliczeń przy zachowaniu dokładnego odwzorowania takiej struktury możliwe jest jedynie przy użyciu metod numerycznych i założeniu niewielkich wymiarów rozpatrywanego modelu. Natomiast chcąc analizować modele dużej skali właściwszym podejściem byłoby dążenie do wyznaczenia parametrów zastępczych dla złożonej struktury cegieł i wówczas możliwość modelowania bez konieczności odwzorowania wszystkich niewielkich szczegółów, takich jak np. drażnienia.

### Autorzy:

dr inż. Agnieszka Choroszucho, E-mail: [a.choroszucho@pb.edu.pl](mailto:a.choroszucho@pb.edu.pl)  
 dr hab. inż. Bogusław Butryło, E-mail: [b.butrylo@pb.edu.pl](mailto:b.butrylo@pb.edu.pl)  
 Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny,  
 Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii,  
 ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok.

### LITERATURA

- [1] Taflove A., Hagness S. C., Computational electrodynamics, The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston, Artech House, (2005)
- [2] Choroszucho A., Butryło B., Numeryczna analiza wpływu parametrów elektrycznych ścian wykonanych z betonu na wartości natężenia pola elektrycznego, *Przegląd Elektrotechniczny*, 89, nr 12, 161-164, (2013)
- [3] Luebbers R.J., Kunz K.S., The finite difference time domain method for electromagnetics. CRS Press Inc., Boca Raton, (1993)
- [4] Landron O., Feuerstein M. J., Rappaport T. S., A comparison of theoretical and empirical reflection coefficients for typical exterior wall surfaces in a mobile radio environment, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, pp. 341-351, (1996)
- [5] Piątek Z., Jabłoński P., Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa, (2010)
- [6] Champagne N. J. II, Berryman J. G., Buettner H. M., FDFD: A 3D finite-difference frequency-domain code for electromagnetic induction tomography, *Journal of Computational Physics, Academic Press*, vol. 170, no. 2, 830-848 (19), (2001)
- [7] Oskooi A. F., Roundyb D., Ibanescua M., Bermelc P., Joannopoulou J. D., Johnson S. G., MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method, *Computer Physics Communications*, 181, 687-702, (2010)
- [8] Elsherbeni A. Z., Demir V., The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations. SciTech Publishing, Inc, USA, (2009)
- [9] Sadiku M.N.O., Numerical techniques in electromagnetics. CRS Press LLC. 2<sup>nd</sup> edition, (2001)
- [10] Berenger J. P., A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, vol. 114, 185-200, (1994)
- [11] Rumpf R. C., Design and optimization of nano-optical elements by coupling fabrication to optical behavior. University of Central Florida Orlando, Florida, Spring Term, (2006)
- [12] Orfanidis S.J., Electromagnetic waves and antennas, *Rutgers University*, [www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa](http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa), (2010)