

Modelowanie matematyczne pracy generatorów indukcyjnych w złożonych układach energetycznych

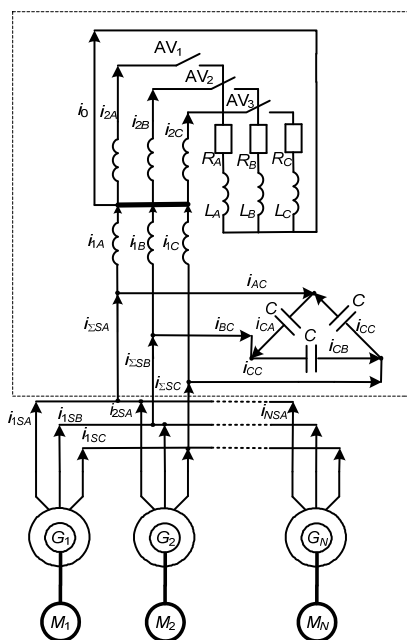
Streszczenie. W pracy sformułowano ogólny model matematyczny zespołu elektroenergetycznego składającego się z generatorów indukcyjnych, transformatorów i baterii kondensatorów. Wykorzystując przedstawiony model poddano analizie procesy nieustalone zachodzące w zespole elektroenergetycznym w różnych stanach pracy. Dla sformowania różniczkowych równań stanu układu wykorzystano metody klasyczne. Wyniki obliczeń numerycznych symulacji komputerowych przedstawiono w postaci graficznej

Abstract. In the paper a general mathematical model of an electric power set is presented. The set consists of induction generators, transformers and batteries of capacitors. On the basis of the abovementioned mathematical model the transient processes in the electric power set were analyzed for various operation states. Classical methods were applied in order to formulate the state differential equations. The results of computer simulation numerical calculations are presented as graphs. **(Mathematical modeling work of induction generators in composite energy systems)**

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona-Ostrogradskiego, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny, transformator mocy
Keywords: Hamilton-Ostrogradsky's principle, Euler-Lagrange's system, electrical set, power transformer

Wstęp

Zespoły elektryczne są jednymi z podstawowych jednostek systemu elektroenergetycznego. W przypadku ogólnym elektrycznie małej mocy można rozpatrywać jako jednostki elektryczne. Elektrownie małej mocy znajdują coraz większe zastosowanie w gospodarce na co mają wpływ różne przyczyny: ekonomiczne, logistyczne, społeczne i in. Podstawowym elementem elektrowni oczywiście jest generator: tzn. maszyna która przekształca energię mechaniczną w elektryczną. Najczęściej wykorzystuje się dwa typy generatorów: synchroniczne (w tym z magnesami trwałymi) oraz asynchroniczne. Każda z wymienionych typów maszyn ma swoje zalety i wady. Generatory synchroniczne mają dość sztywną charakterystykę mechaniczną, natomiast wymagają źródła prądu stałego oraz w temacie niezawodności są gorsze od maszyn asynchronicznych, co związane jest z konstrukcją maszyn obu typów. Dla generatora asynchronicznego jedną z głównych wad jest to, że wymieniony typ maszyn potrzebuje w stanie autonomicznym źródła energii biernej zazwyczaj to bateria kondensatorów statycznych.



Rys. 1. Schemat ogólny układu elektroenergetycznego

Schemat połączeń analizowanego układu przedstawiono na rys. 1.

W skład analizowanego układu elektroenergetycznego wchodzi:

- generatory indukcyjne – N sztuk,
- autotransformator,
- bateria kondensatorów statycznych,
- obciążenia mini-elektrowni.

W pracy wykorzystano metodę klasyczną, polegającą na dekompozycji jednolitego układu z wykorzystaniem praw fizyki [2, 6]. Otrzymane równania stanów każdego z analizowanych podukładów połączono za pomocą równań powiązań stacjonarnych.

Model matematyczny układu.

Model matematyczny układu zapisano na podstawie modelu uogólnionego [2, 3, 6]. Dla k -tego generatora:

$$(1) \quad \frac{d\Psi_{S,k}}{dt} = -\mathbf{u}_{S,k} - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k}$$

$$\frac{d\Psi_{R,k}^{\Pi_k}}{dt} = -\mathbf{u}_{R,k}^{\Pi_k} - \mathbf{r}_{R,k} \mathbf{i}_{R,k}^{\Pi_k} - \Omega_{R,k} \Psi_{R,k}^{\Pi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

Do równań (1) zależności stacjonarnych powiązań między strumieniami skojarzonymi oraz prądami generatora [2, 6] można zapisać w postaci:

$$(2) \quad \Psi_{S,k} = \alpha_{\sigma S,k}^{-1} \mathbf{i}_{S,k} + \Psi_{S,k}, \quad \Psi_{R,k} = \alpha_{\sigma R,k}^{-1} \mathbf{i}_{R,k} + \Psi_{R,k},$$

$$(3) \quad \Psi_{S,k} = \tau_k^{-1} (\mathbf{i}_{S,k} + \Pi_k \mathbf{i}_{R,k}), \quad L_{m,k} = \tau_k^{-1}, \quad \Psi_{S,k} = \Pi_k \Psi_{R,k},$$

gdzie Ψ – macierz sprzężeń magnetycznych, L_m – indukcyjność magnesowania maszyny, τ główna odwrotna indukcyjność statyczna.

Rozwiązujący razem wyrażenia (1) – (3) dla współrzędnych prądów fazowych [2] otrzymano

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{i}_{S,k}}{dt} = \mathbf{A}_{S,k} (-\mathbf{u}_{S,k} - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k}) + \mathbf{A}_{SR,k} (-\Omega_k \Psi_{R,k} - \mathbf{r}_{RL,k} \mathbf{i}_{R,k})$$

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{i}_{R,k}}{dt} = \mathbf{A}_{RS,k} (-\mathbf{u}_{S,k} - \mathbf{r}_{S,k} \mathbf{i}_{S,k}) + \mathbf{A}_{R,k} (-\Omega_k \Psi_{R,k} - \mathbf{r}_{RL,k} \mathbf{i}_{R,k}) + \Omega_k \mathbf{i}_{R,k},$$

gdzie $\mathbf{A}_{S,k}$, $\mathbf{A}_{SR,k}$, $\mathbf{A}_{RS,k}$, $\mathbf{A}_{R,k}$ – współczynniki, które zależą od indukcyjności rozproszenia i magnesowania generatora

asynchronicznego, Ω – macierz SEM rotacji [6].

Moment elektromagnetyczny opisuje zależność [2, 6]:

$$(6) \quad M_{E,k} = \sqrt{3} p_{0,k} (i_{SA,k} i_{RB,k}^{\Pi} - i_{SB,k} i_{RA,k}^{\Pi}) / \tau_{m,k},$$

gdzie $p_{0,k}$ – liczba par biegunów maszyny, Π – wskazuje na przekształcenie we współrzędnych ukośnych [1, 2].

Dla pozostałych elementów układu energetycznego opisujące je zależności matematyczne przyjmują postać [1, 2]:

$$(7) \quad \frac{d\mathbf{i}_1^{(2)}}{dt} = \mathbf{K}_{11}(\mathbf{u}_1^{(2)} - \mathbf{r}_1^{(2)}\mathbf{i}_1^{(2)}) + \mathbf{K}_{12}(\mathbf{u}_2^{(3)} - \mathbf{r}_2^{(3)}\mathbf{i}_2^{(3)}),$$

$$(8) \quad \frac{d\mathbf{i}_2^{(3)}}{dt} = \mathbf{K}_{21}(\mathbf{u}_1^{(2)} - \mathbf{r}_1^{(2)}\mathbf{i}_1^{(2)}) + \mathbf{K}_{22}(\mathbf{u}_2^{(3)} - \mathbf{r}_2^{(3)}\mathbf{i}_2^{(3)}),$$

gdzie, $\mathbf{K}_{1,1}$, $\mathbf{K}_{1,2}$, $\mathbf{K}_{2,1}$, $\mathbf{K}_{2,2}$ – współczynniki, które zależą od indukcyności rozproszenia i magnesowania generatora indukcyjnego, $^{(2),(3)}$ – wskazuje na porządek macierzy lub wektora kolumnowego [2].

$$(9) \quad \mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{13} & a_{12} - a_{13} \\ a_{21} - a_{23} & a_{22} - a_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix},$$

$$(10) \quad \mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} b_{11} - b_{13} & b_{21} - b_{23} & b_{31} - b_{33} \\ b_{12} - b_{13} & b_{22} - b_{23} & b_{32} - b_{33} \end{bmatrix}^T,$$

$$(11) \quad \mathbf{K}_{22}^{(3)} \equiv \alpha_{\sigma 2}^{(3)}(\mathbf{1} - \alpha_{\sigma 2}^{(3)}\mathbf{G}^{(3)}),$$

$$(12) \quad \mathbf{G} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \alpha_B \alpha_C - \alpha_0^2 & (\alpha_0 - \alpha_C)\alpha_0 & (\alpha_0 - \alpha_B)\alpha_0 \\ (\alpha_0 - \alpha_C)\alpha_0 & \alpha_A \alpha_C - \alpha_0^2 & (\alpha_0 - \alpha_A)\alpha_0 \\ (\alpha_0 - \alpha_B)\alpha_0 & (\alpha_0 - \alpha_A)\alpha_0 & \alpha_B \alpha_A - \alpha_0^2 \end{bmatrix},$$

$$(13) \quad \alpha_{\sigma 1}^{(3)}(\mathbf{1} - \alpha_{\sigma 1}^{(3)}\mathbf{G}^{(3)}) = \|a_{mm}\|, \quad -\alpha_{\sigma 1}^{(3)}\alpha_{\sigma 2}^{(3)}\mathbf{G}^{(3)} = \|b_{mm}\|,$$

$$(14) \quad \alpha_{\sigma 1}^{(3)} \equiv \text{diag}(L_{\sigma 1}^{-1}j), \quad \alpha_{\sigma 2}^{(3)} \equiv \text{diag}(L_{\sigma 2}^{-1}j), \quad \alpha_0 = L_{\sigma 0}^{-1},$$

$$(15) \quad \Delta = \alpha_A \alpha_B \alpha_C - \alpha_0^2(\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C + 2\alpha_0),$$

$$(16) \quad \rho_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial \psi_j}, \quad \alpha_j = \rho_j + \alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} + \alpha_0, \quad j = A, B, C,$$

$$(17) \quad \mathbf{u}_2^{(3)*} = k_T \mathbf{u}_2^{(3)} = -\mathbf{u}^{(3)}, \quad \mathbf{i}_2^{(3)*} = \frac{\mathbf{i}_2^{(3)}}{k_T} = \mathbf{i}^{(3)}, \quad k_T = \frac{w_1}{w_2},$$

gdzie: $\alpha_{\sigma 1}^{(3)}\alpha_{\sigma 2}^{(3)}$ – odwrotne indukcyności rozproszenia uzwojeń transformatora, * – wskazuje na rzeczywisty układ współrzędnych (nie przekształcony), k_T – przekładnia, τ – główna odwrotna statyczna indukcyności.

Dla baterii kompensacyjnej [4].

$$(18) \quad \frac{d\mathbf{u}_C}{dt} = \frac{1}{C}\mathbf{i}_C, \quad u_{CAB} + u_{CBC} + u_{CCA} = 0, \quad i_{CA} + i_{CB} + i_{CC} = 0,$$

gdzie \mathbf{u}_C , \mathbf{i}_C – napięcie oraz prąd baterii.

Model matematyczny obciążenia baterii [6]

$$(19) \quad \mathbf{u}^{(3)} = -k_T \mathbf{u}_2^{(3)} = \mathbf{L}^{(3)} \frac{d\mathbf{i}^{(3)}}{dt} + \mathbf{R}^{(3)}\mathbf{i}^{(3)}.$$

Dla uzupełnienia modelu matematycznego układu niezbędne jest uwzględnienie dodatkowo równań powiązań stacjonarnych [2]

$$(20) \quad i_A + i_B + i_C + i_0 = 0, \quad i_{1A} + i_{1B} + i_{1C} = 0,$$

$$(21) \quad i_{SA,k} + i_{SB,k} + i_{SC,k} = 0, \quad \mathbf{u}_{\Sigma C} = \mathbf{u}_{SA,k} = \mathbf{u}_1,$$

$$(22) \quad \sum_{k=1}^N \mathbf{i}_k - \mathbf{i}_{\Sigma} = 0, \quad \mathbf{i}_{\Sigma} - \mathbf{i}_{\Sigma C} - \mathbf{i}_1 = 0,$$

$$(23) \quad i_{\Sigma CA} = i_{CC} - i_{CA} = 2i_{CA} + i_{CB}, \quad i_{\Sigma CB} = i_{CB} - i_{CA}.$$

Uwzględniając w wyrażeniach (1) – (3) zależności (21) można zapisać:

$$(24) \quad \frac{d}{dt}(\Psi_{SA,k} + \Psi_{SB,k} + \Psi_{SC,k}) = -(u_{SA,k} + u_{SB,k} + u_{SC,k}) - r_{S,k}(i_{SA,k} + i_{SB,k} + i_{SC,k}) \Rightarrow u_{SA,k} + u_{SB,k} + u_{SC,k} = 0.$$

Na podstawie rys.1 można zapisać

$$(25) \quad u_{SA,k} - u_{SB,k} = u_{CA}, \quad u_{SB,k} - u_{SC,k} = u_{CB}, \\ u_{SC,k} - u_{SA,k} = u_{CC}.$$

Skąd, patrz (24, 25), otrzymano:

$$(26) \quad u_{SA,k} = \frac{1}{3}(2u_{CA} + u_{CB}), \quad u_{SB,k} = \frac{1}{3}(u_{CB} - u_{CA}).$$

Następnie, z równania (22):

$$(27) \quad \mathbf{i}_{\Sigma C} = \sum_{k=1}^N \mathbf{i}_{S,k} - \mathbf{i}_1.$$

(lub dla postaci współrzędnych)

$$(28) \quad i_{\Sigma CA} = 2i_{CA} + i_{CB} = \sum_{k=1}^N i_{SA,k} - i_{1A},$$

$$(29) \quad i_{\Sigma CB} = i_{CB} - i_{CA} = \sum_{k=1}^N i_{SB,k} - i_{1B}.$$

Wtedy, prądy w baterii:

$$(30) \quad i_{CA} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N (i_{SA,k} - i_{SB,k}) - (i_{1A} + i_{1B}) \right),$$

$$(31) \quad i_{CB} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^N i_{SA,k} - i_{1A} + 2 \left(\sum_{k=1}^N i_{SB,k} - i_{1B} \right) \right).$$

Podstawiając wyrażenia (30), (31) do równania (18), otrzymano

$$(32) \quad \frac{du_{CA}}{dt} = \frac{1}{3C} \left(\sum_{k=1}^N (i_{SA,k} - i_{SB,k}) - (i_{1A} + i_{1B}) \right),$$

$$(33) \quad \frac{du_{CB}}{dt} = \frac{1}{3C} \left(\sum_{k=1}^N i_{SA,k} - i_{1A} + 2 \left(\sum_{k=1}^N i_{SB,k} - i_{1B} \right) \right).$$

Przedstawione równania są podstawą obliczenia napięcia na uzwojeniach wszystkich generatorów i pierwotnego uzwojenia autotransformatora. Uwzględniając (19) w zależności (8) otrzymano

$$(34) \quad \frac{d\mathbf{i}_2^{(3)}}{dt} = (\mathbf{1} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{L}^{(3)})^{-1} \left[\mathbf{K}_{21}(\mathbf{u}_1^{(2)} - \mathbf{r}_1^{(2)}\mathbf{i}_1^{(2)}) - \mathbf{K}_{22}(\mathbf{R}^{(3)} + \mathbf{r}_2^{(3)})\mathbf{i}_2^{(3)} \right].$$

Dodatkowo należy pamiętać, że:

$$(35) \quad i_0 = -i_A - i_B - i_C.$$

Wspólnemu całkowaniu podlega taki układ równań różniczkowych: (4), (5), (7), (32) – (34) z uwzględnieniem wyrażań: (3), (6), (9) – (17), (23), (28) – (35).

Wyniki symulacji komputerowej.

Do obliczeń numerycznych wykorzystano generatory indukcyjne o danych znamionowych: $P_H = 4,5$ kW, $U_N = 400$ V, $I_N = 9,4$ A, $n_N = 1440$ s⁻¹, $r_S = 1,2$ Ω , $r_R = 1,21$ Ω , $\alpha_{\sigma S} = 146$ GH⁻¹, $\alpha_{\sigma R} = 128$ GH⁻¹, $p_0 = 2$,

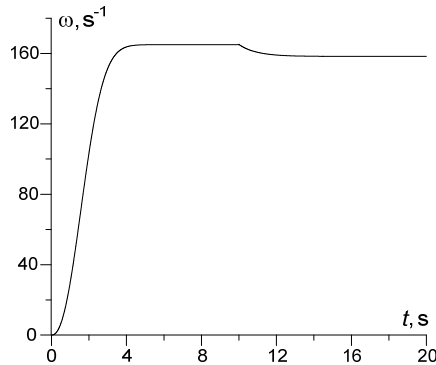
$J = 0,05 \text{ kgm}^2$. Krzywa magnesowania maszyny opisana jest zależnością:

$$(36) \quad i_m = \begin{cases} \alpha_m \psi_m, & \text{if } \psi_m \leq \psi_k; \\ k_0 \psi_m + k_1 \psi_m^3 + k_2 \psi_m^5, & \text{if } \psi_m > \psi_k, \end{cases}$$

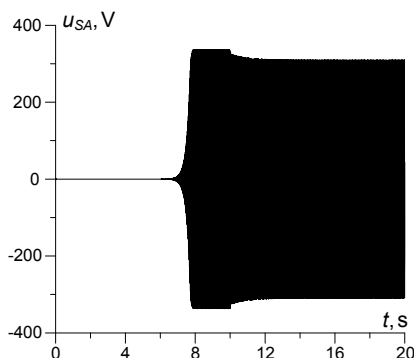
gdzie: $k_0 = 8,13$, $k_1 = -5,34$, $k_2 = 7,21$, $\alpha_m = 7,14$, $\psi_k = 0,63$.

Bateria kondensatorów o pojemności: I – $C_1 = 200 \mu F$, II – $C_2 = 350 \mu F$. Pierwsza kaskada wykorzystana została dla rozruchu układu w stanie jałowym. Natomiast druga – wykorzystana została w stanie roboczym. W stanie ustalonym momenty maszyn napędowych przyjęto jako stałe, aktywne. Przekładnia autotransformatora $k_T = 1,02$ oraz obciążenie $R = 30 \Omega$, $L = 80 \text{ mH}$. Do analizy układu wykorzystano trzy przypadki obliczeniowe w zależności od momentu rozwijanego przez silniki napędowe: dla pierwszego – $M(\omega_1) = M(\omega_2) = 30 \text{ Nm}$, dla drugiego – $M(\omega_1) = 20 \text{ Nm}$, $M(\omega_2) = 30 \text{ Nm}$, oraz dla trzeciego – $M(\omega_1) = 20 \text{ Nm}$, $M(\omega_2) = 20 \text{ Nm}$.

Na rysunku 2 przedstawiono przebieg czasowy prędkości kątowych obu generatorów indukcyjnych dla pierwszego przypadku obliczeniowego. Rozruch układu trwał do 5 s. W chwili czasu $t = 10 \text{ s}$ do końcówek linii zasilania zostało podłączone obciążenie RL. Co spowodowało spadek prędkości obrotowej obu generatorów, a także zmniejszenie częstotliwości oraz napięcia układu elektroenergetycznego (rysunek 3)

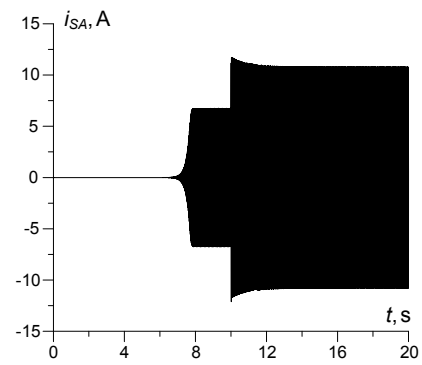


Rys. 2. Przebieg czasowy prędkości kątowej wirników obu generatorów (dla pierwszego przypadku obliczeniowego)

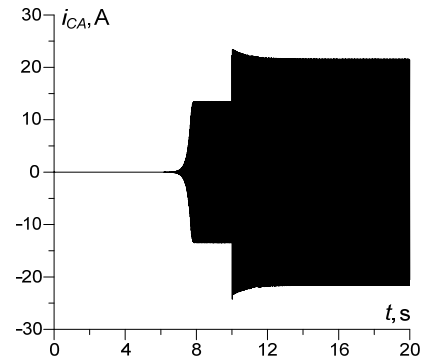


Rys. 3. Przebieg czasowy napięcia fazy A obu generatorów (pierwszy przypadek obliczeniowy)

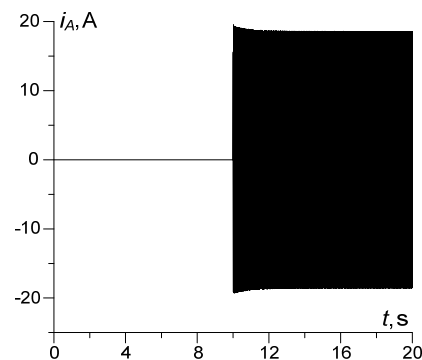
Rysunki 4 – 6 przedstawiają przebiegi czasowe prądów: fazy A stojana, płynącego przez baterię oraz w gałęzi obciążania dla pierwszego przypadku obliczeniowego.



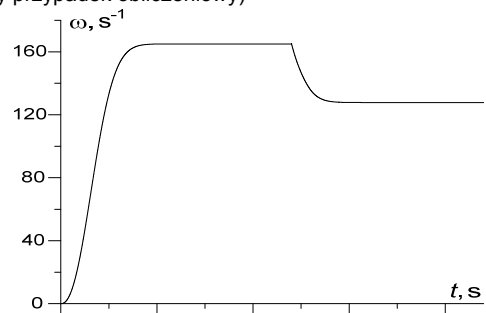
Rys. 4. Przebieg czasowy prądu fazy A stojana w obu generatorach (pierwszy przypadek obliczeniowy)



Rys. 5. Przebieg czasowy prądu fazy A płynącego przez baterię (pierwszy przypadek obliczeniowy)



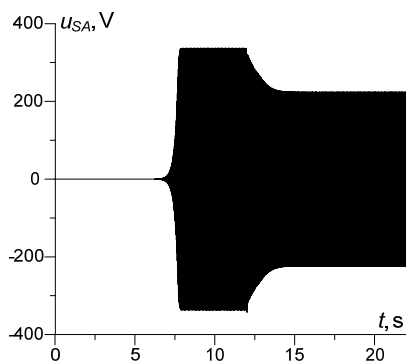
Rys. 6. Przebieg czasowy prądu fazy A w gałęzi obciążenia (pierwszy przypadek obliczeniowy)



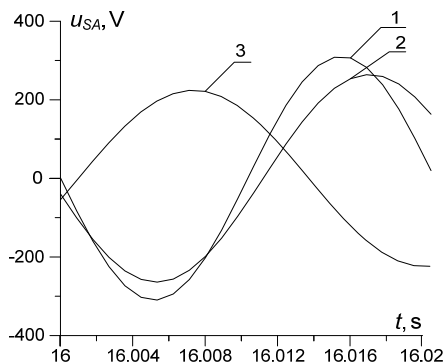
Rys. 7. Przebieg czasowy prędkości kątowej wirników obu generatorów (trzeci przypadek obliczeniowy)

Na rysunkach 7 i 8 przedstawiono prędkości kątowe obu generatorów oraz napięcie dla trzeciego przypadku obliczeniowego. Podłączenie obciążenia w drugim i trzecim przypadku obliczeniowym odbywało się w chwili $t = 12,5 \text{ s}$.

Na rysunku 9 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia fazy A na obciążeniu dla wszystkich trzech przypadków obliczeniowych w zakresie czasowym $t \in [16, 16,02] \text{ s}$.



Rys. 8. Przebieg czasowy napięcia fazy A obu generatorów (trzeci przypadek obliczeniowy)



Rys. 9. Napięcie fazy A pierwszego generatora w zakresie czasowym $t \in [16,0; 16,02]$ s dla trzech przypadków obliczeniowych

Wnioski

Przedstawiony w pracy przy wykorzystaniu metod klasycznych model matematyczny zespołu elektroenergetycznego, który składa się z N generatorów indukcyjnych połączonych między sobą równolegle i pracujący przez autotransformator na asymetryczne rezystancyjno-indukcyjne obciążenie z uwzględnieniem baterii kondensatorów statycznych umożliwia analizę w szerokim zakresie pracy całego układu energetycznego. Przedstawiona analiza obliczeniowa pozwala na ocenę wpływu parametrów wewnętrznych i zewnętrznych

charakteryzujących układ na jego pracę, a programy symulacyjne mogą być wykorzystane do projektowania nowych lub analizy pracy istniejących układów energetycznych.

Autorzy: dr hab. inż. Andriy Czaban prof. PCz, Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17, E-mail: atchaban@gmail.com, dr. hab. inż. Marek Lis Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17 lism@el.pcz.czest.pl, mgr inż. Andrzej Gastołek REVICO Płock (Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny), mgr inż. Jarosław Sosnowski REVICO Płock (Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny)

LITERATURA

- [1] Czaban A., Rusek A., Lis M.: The Approach Based on Variation Principles for Mathematical Modeling of Asymmetrical States in a Power Transformer. *Przegląd Elektrotechniczny* R.88 nr 12b 2012 s.240-242 ISSN 0033-2097.
- [2] Czaban A. Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych. *Monografia. W-wo T. Soroki*, Lwów, 2015, 464 s.
- [3] Lis M. Modelowanie matematyczne procesów niustalonych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu. Częstochowa. – *W-wo Politechniki Częstochowskiej*, 2013. – 258 s.
- [4] Kopyłow I. *Maszyny elektryczne (Electrical Machines)*, Moscow: Wyższa Szkoła, 2004, p. 607.
- [5] A. Rusek Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykorzystania. *Monografia. W-wo Politechniki Częstochowskiej*, Częstochowa, 2012.
- [6] Tchaban V. *Podstawy teorii procesów przejściowych w układach elektromaszynowych.* – Lwów: High School, 1980. – 200 s.
- [7] Szewczyk K., Golisz R., Wałasek T., Kucharczyk Z., The influence of an air gap around the permanent magnets with the flux concentrator in Permanent Magnet Synchronous Motor with Internal Magnetic Circuits, *Zastosowania Elektromagnetyzmu w Nowoczesnych Technikach i Informatyce. XXI Sympozjum Środowiskowe PTZE.* 5-8 czerwca 2011. Lubliniec.