

doi:10.15199/48.2015.06.34

# Efektywna realizacja kompensacji pełnej i optymalnej mocy biernej w układzie jednofazowym oraz trójfazowym 3 lub 4 przewodowym przy zasilaniu układem symetrycznym źródeł rzeczywistych i niesymetrycznym odbiorniku liniowym

**Streszczenie:** Przedstawiono sposób wyznaczania elementów kompensatora w realizacji pełnej kompensacji i optymalnej mocy biernej dla odbiornika liniowego w układach jednofazowych i trójfazowych niesymetrycznych. Wyprowadzono analityczny warunek optymalizacji i przedstawiono jego interpretację geometryczną. Zastosowanie metody zilustrowano na wybranych przykładach.

**Abstract.** The way of determining the elements of the compensator in the implementation of full compensation and optimal reactive power for linear receiver in single-phase and three-phase unbalanced. Derived analytical condition optimization, and presents its geometric interpretation. Application of the method illustrated in the selected examples. **Effective implementation of full compensation and optimal reactive power in single-phase and three-phase 3 or 4 wire system with symmetrical power real sources and unbalanced linear load.**

**Słowa kluczowe:** teoria mocy, prądy sinusoidalne, moc bierna, kompensacja optymalna, układy trójfazowe  
**Keywords:** power theory, sinusoidal current, reactive power, optimum compensation, three-phase systems

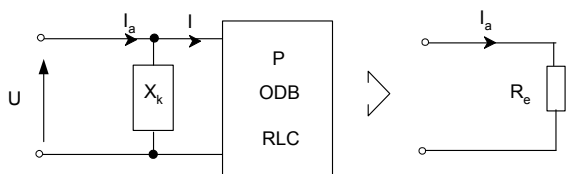
## Wstęp

Z przesłanek ekonomicznych wynika potrzeba przesyłania energii elektrycznej przy jak najmniejszych kosztach. Stąd wynika warunek minimalizacji prądu w liniach zasilających. Warunek ten z kolei wymaga pełnej kompensacji mocy biernej. Stan kompensacji pełnej w sensie Fryzego dla minimalizacji prądu jest wystarczający w przypadku idealnych (sztywnych) lub o pomijalnie małych impedancjach wewnętrznych źródeł i linii zasilających. Przy źródłach rzeczywistych (elastycznych) lub niezerowych impedancjach linii jak już przedstawiono w [12] minimalizacja prądu wymaga dodatkowej procedury optymalizacyjnej. W ogólnym przypadku na przykład w układach nieliniowych [1, 2] sama kompensacja mocy biernej nie wystarcza do minimalizacji prądu, nawet w szczególnych przypadkach może spowodować pogorszenie i powiększenie prądu w linii. W tej sytuacji wskazane jest zastosowanie metody optymalizacji przedstawionej w [12].

Celem niniejszego opracowania jest prezentacja metody pełnej kompensacji wraz z metodą optymalizacji w układach jednofazowych i trójfazowych liniowych. W tym przypadku warunek optymalizacyjny można wyznaczyć analitycznie, a realizacja parametrów kompensatora jest zawsze wykonalna przez dobór elementów reaktancyjnych LC układu kompensacyjnego. Warto zaznaczyć, że procedura postępowania jak również sam algorytm obliczeń jest identyczny podobnie jak dla jednofazowych również dla układów trójfazowych przy wykorzystaniu metody symetryzacji przedstawionej w [1, 2].

## Opis metody realizacji w układzie jednofazowym

W pierwszej kolejności rozpatrzmy odbiornik jednofazowy liniowy złożony z elementów RLC jak na rysunku (rys. 1)



Rys.1 Odbiornik liniowy RLC i reaktancja kompensacji pełnej  $X_k$ , oraz równoważny rezystor  $R_e$

Jako dane wyjściowe do obliczeń przyjmuje się, napięcie  $U$ , prąd  $I$ , moc  $P$  odbiornika. Po włączeniu reaktancji kompensującej  $X_k$  odbiornik sprowadza się do równoważnego rezystora  $R_e$ , których wartości wyznaczamy z wzorów

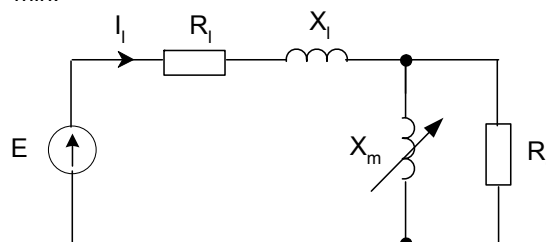
$$(1) \quad S = UI, \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$(2) \quad R_e = \frac{U^2}{P}, \quad X_k = \mp \frac{U^2}{Q},$$

gdzie znak mocy biernej i reaktancji należy ustalić z charakteru obciążenia odbiornika (indukcyjno-pojemnościowego).

Przy zasilaniu idealnym minimalna wartość prądu po kompensacji  $I_{\min} = I_a = P/U$ .

Przy uwzględnieniu w układzie zasilającym parametrów linii  $R_l, X_l$  należy wprowadzić dodatkową reaktancję minimalizacyjną  $X_m$  tak dobraną aby  $I_l = \min$ .



Rys.2 Układ do wyznaczenia optymalizacji prądu w linii

Dla układu realizującego kompensację optymalną (rys.2) prąd płynący w linii wyraża się wzorem

$$(3) \quad I_l = \frac{E}{\left| R_l + jX_l + \frac{jX_m R_e}{R_e + jX_m} \right|} = \frac{E}{\left| (R_l + jX_l) + R_e \frac{jx}{1 + jx} \right|}$$

gdzie w celu uproszczenia zapisu, wprowadzono oznaczenie zmiennej bez wymiarowej

$$(4) \quad x = \frac{X_m}{R_e}$$

Z warunku dla minimum (lub maksimum)) prądu

$$(5) \quad \frac{dI_l}{dx} = 0$$

po przekształceniach matematycznych wynika równanie

$$(6) \quad -X_l x^4 + (2R_l + R_e)x^3 + (2R_l + R_e)x + X_l = 0$$

Można zauważyć że przy  $X_l=0$  równanie (6) redukuje się do równania 3 stopnia dla którego istnieje rozwiązanie trywialne  $x=0$ , przy czym pozostałe dwa pierwiastki są zespolone.

Przy założeniu  $X_l \neq 0$  dzieląc stronami przez  $X_l$  otrzymuje się równanie postaci

$$(7) \quad -x^4 + m x^3 + m x + 1 = 0$$

gdzie

$$(8) \quad m = \frac{2R_l + R_e}{X_l}$$

Równanie powyższe sprowadza się do równania kwadratowego. Dzieląc stronami równanie (7) przez  $x^2$  otrzymuje się wyrażenie

$$-x^2 + x^{-2} + m(x + x^{-1}) = 0$$

lub

$$(-x + x^{-1})(x + x^{-1}) + m(x + x^{-1}) = 0$$

stąd przy  $x + x^{-1} \neq 0$  wynika

$$(9) \quad -x + \frac{1}{x} + m = 0$$

którego rozwiązanie ma postać

$$(10) \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \left( m \pm \sqrt{m^2 + 4} \right)$$

Z rozwiązania (9) otrzymuje się również wartość reaktancji  $x_1$  dla minimum prądu i  $x_2$  dla maksimum prądu. Wartość dodatnia wyznacza minimum wartości prądu, stąd reaktancja realizująca minimum wyraża się wzorem

$$(11) \quad X_m = \frac{1}{2} \left( m + \sqrt{m^2 + 4} \right) R_e$$

Na przykład dla danych:

$$R_l=1\Omega, X_l=5\Omega, R_e=20\Omega, m=21/5=4,2,$$

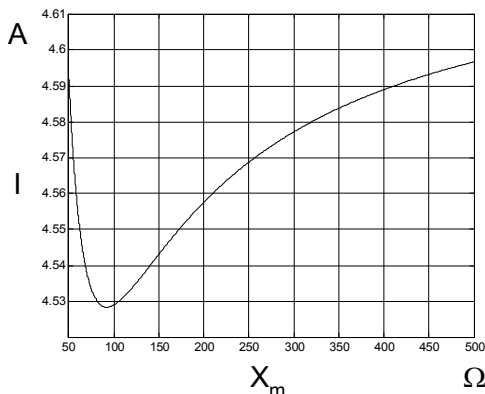
wynika

$$x_1=4,61, x_2=-0,21$$

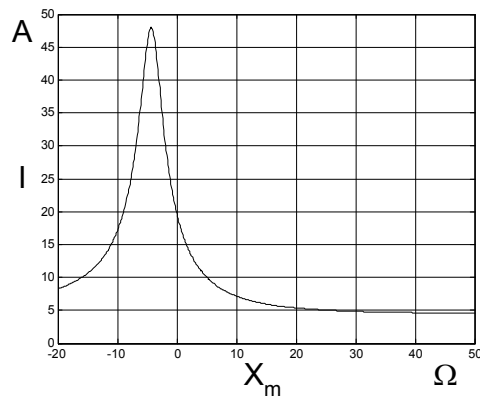
stąd

$$X_{\min}=92,33\Omega, X_{\max}=-4,33\Omega, I_{\min}=4,52A, I_{\max}=48,00A$$

Wartości te są zgodne z wartościami przedstawionymi na wykresach (rys.3, 4) obliczonymi wprost z wzoru (2)

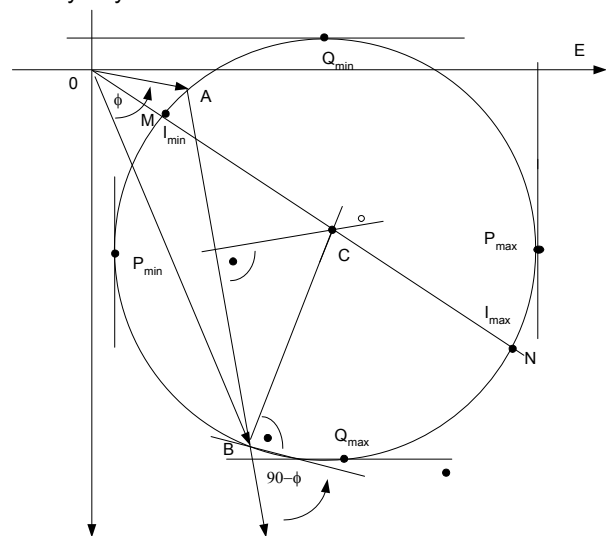


Rys3 Wykres prądu  $I_l$  funkcji reaktancji  $X_m$  w przedziale dla  $X_m \in (50,500)$ , minimum przy  $X_m=92,33\Omega$



Rys.4 Wykres prądu jako funkcji reaktancji  $X_m$  w przedziale dla  $X_m \in (-20,50)$ , maksimum przy  $X_m=-4,33\Omega$

Idea optymalizacji oraz wyniki obliczeń mogą być poglądowo zilustrowane geometrycznie na wykresie kołowym rys.5



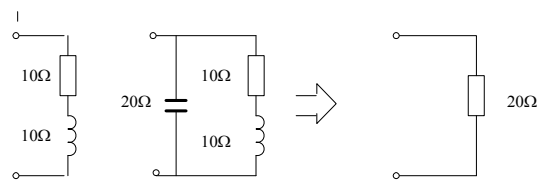
Rys.5 Wykres kołowy prądu linii jako funkcja reaktancji kompensatora  $X_m$

Konstrukcja wykresu kołowego sprowadza się do narysowania dwóch wartości zespolonych prądu w linii  $I_{IA}$  i  $I_{IB}$  odpowiednio przy  $X_m=\infty$ , oraz przy  $X_m=0$  jako końce wektorów w pkt. A i w pkt. B. Środek okręgu leży na symetralnej odcinka AB i prostopadłej do prostej w pkt.B poprowadzonej pod kątem  $90-\phi$  względem prostej AB, gdzie kąt  $\phi$  jest różnicą argumentów prądów  $I_{IA}$ ,  $I_{IB}$ . Minimum i maksimum prądu leży na przecięciu okręgu z prostą łączącą początek układu z środkiem okręgu (pkt. C).

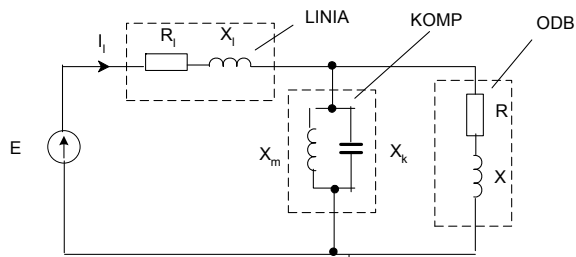
Na wykresie kołowym można odnaleźć również punkty odpowiadające prądowi przy którym pobierane są maksymalne i minimalne moce czynne P i bierne Q.

Przykład 1:

Przeprowadźmy obliczenia kompensacji pełnej i optymalnej gałęzi szeregowej RL rys. 6



Rys.6 Gałąź szeregową RL i równoważny rezystor po kompensacji pełnej za pomocą kondensatora  $X_k=20\Omega$



Rys.7 Obwód do wyznaczenia parametrów kompensacji pełnej  $X_k$ , oraz kompensacji optymalnej  $X_m$

W obwodzie (rys.7) dane są napięcie źródła zasilania  $E=100V$ , rezystancja linii  $R_l=1\Omega$ , reaktancja linii  $X_l=5\Omega$ , odbiornik szeregowy (rys.6) o rezystancji  $R=10\Omega$ , reaktancji  $X=10\Omega$ .

a) Obliczamy prąd w linii bez kompensacji

$$I_l = \frac{E}{\sqrt{(R_l + R)^2 + (X_l + X)^2}} = \frac{100}{\sqrt{11^2 + 15^2}} = 5,37A$$

Strata mocy przed kompensacją

$$\Delta P_l = R_l I_l^2 = 1 \cdot 5,37^2 = 28,9W$$

b) Obliczamy prąd w linii po kompensacji pełnej

$$I_l = \frac{E}{\sqrt{(R_l + R_e)^2 + X_l^2}} = \frac{100}{\sqrt{21^2 + 5^2}} = 4,63A$$

Strata mocy po kompensacji pełnej

$$\Delta P_l = R_l I_l^2 = 1 \cdot 4,63^2 = 21,4W$$

Zmniejszenie strat mocy o 25,9%

c) Obliczmy prąd w linii po kompensacji pełnej i optymalnej W tym celu dla zadanych parametrów linii i odbiornika wyznaczamy parametr  $m$

$$m = \frac{2R_l + R_e}{X_l} = \frac{2 \cdot 1 + 20}{5} = 4,4$$

stąd z wzoru (9) wynika reaktancja  $X_m$  realizująca minimum prądu

$$X_m = \frac{1}{2} \left( m + \sqrt{m^2 + 4} \right) R_e = \frac{1}{2} \left( 4,4 + \sqrt{4,4^2 + 4} \right) 20 = 92,33\Omega$$

Prąd obliczamy wprost ze wzoru (3)

$$I_l = \frac{E}{\left| R_l + jX_l + \frac{jX_m R_e}{R_e + jX_m} \right|} = \frac{100}{\left| 1 + j5 + \frac{j92,33 \cdot 20}{20 + j92,33} \right|} = 4,52A$$

Strata mocy w linii po kompensacji optymalnej

$$\Delta P_l = R_l I_l^2 = 1 \cdot 4,52^2 = 20,4W$$

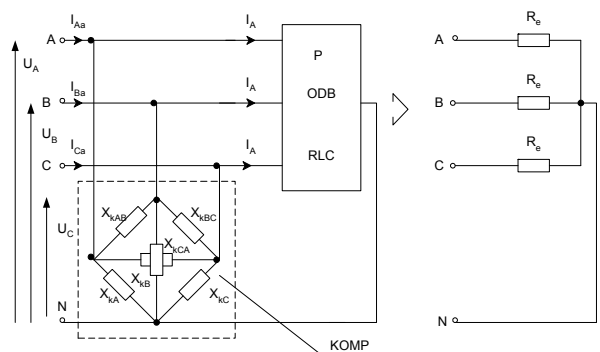
Otrzymuje się dalsze zmniejszenie strat o 5%. W tym przypadku nie jest to tak znaczne jak przy kompensacji pełnej. Razem kompensacja łączna pełna i optymalna obniżyła straty o 29,4%.

### Opis metody realizacji w układzie trójfazowym 4 przewodowym

Jako założenia wstępne przyjmuje się symetryczny układ zasilający źródeł sinusoidalnych  $e_A(t)$ ,  $e_B(t)$ ,  $e_C(t)$  wraz z symetryczną trójfazową linią zasilającą. Linia dla obciążenia niesymetrycznego charakteryzuje się rezystancją 3 przewodów fazowych  $R_f$  oraz reaktancjami dla poszczególnych składowych symetrycznych, dodatniej, ujemnej i zerowej  $X_{11}=X_{12} < X_{10}$ , może być również uwzględniona rezystancja przewodu neutralnego  $R_n$ .

Odbiornikiem może być dowolny niesymetryczny układ złożony z elementów liniowych RLC. Jak pokazano w [2,12], przy tych założeniach istnieje układ cztero-zaciskowy (czwórbiegun) kompensatora, realizujący kompensację pełną mocy bierniej absolutnej i redukujący

układ odbiornika do gwiazdy symetrycznej trzech rezystorów  $R_e$  jak na rysunku (rys.8).



Rys.8 Odbiornik niesymetryczny wraz z czwórbiegunem kompensatora, gwiazda symetryczna po kompensacji pełnej mocy bierniej absolutnej

W dowolnym układzie trójfazowym 4 przewodowym moce pozorna i bierna absolutna określone są wzorami [2]

$$(12) \quad S = \sqrt{(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2)(I_A^2 + I_B^2 + I_C^2)},$$

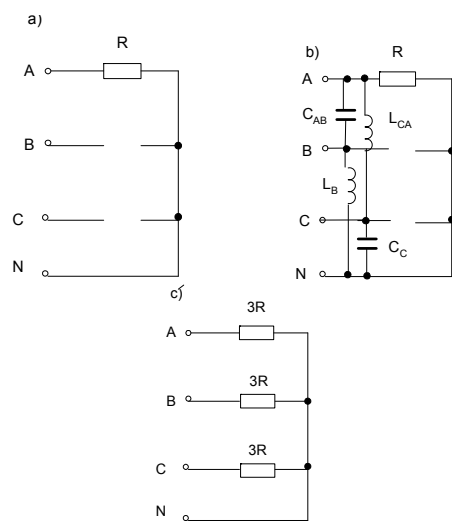
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Zgodnie z teorią o kompensacji w układach trójfazowych przedstawioną w [2], można dobrać tak 6 elementów czwórbieguna -kompensatora aby moc bierna układu  $Q=0$ , a układ zredukował się do gwiazdy symetrycznej rezystorów o wartości  $R_e$ . Elementy układu kompensatora przy sinusoidalnych napięciach mogą być zrealizowane przez elementy reaktancyjne LC. Przy symetrycznym układzie zasilającym rezystancja ekwiwalentnej gwiazdy wyznaczana jest ze wzoru

$$(13) \quad R_e = \frac{U_A^2 + U_B^2 + U_C^2}{P} = \frac{3U^2}{P}$$

Przykład 2:

Jako przykład ilustrujący metodę, rozważmy obciążenie jednofazowe rezystorem  $R$  układu 3 fazowego jak na rysunku (rys.9 a)



Rys.9 a) Odbiornik niesymetryczny obciążenie jednofazowe rezystorem  $R$ , b) elementy kompensatora  $X_{KAB}$ ,  $X_{KCA}$ ,  $X_{KB}$ ,  $X_{KC}$ , c) układ po kompensacji jako gwiazda symetryczna rezystorów o wartości  $3R$

Rozpatrywany przykład jest o tyle interesujący, że odbiornik jako rezystor  $R$  mocy bierniej w zwykłym sensie nie pobiera, jednak jako element układu trójfazowego niesymetrycznego, w sensie wzorów (12) moc bierną

absolutną pobiera, której wartość obliczamy, kolejno ze wzorów

$$I_A = \frac{U}{R}, \quad I_B = 0, \quad I_C = 0$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$S = \sqrt{3U^2 \left(\frac{U}{R}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot P$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3P^2 - P^2} = \sqrt{2} \cdot P$$

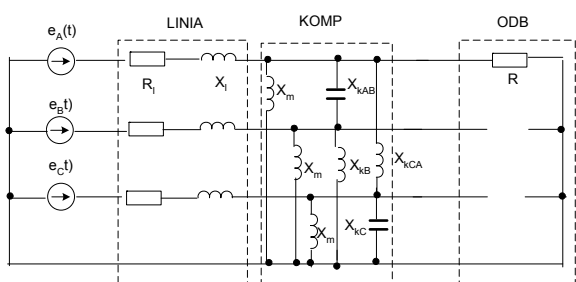
Współczynnik mocy

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Współczynnik nadmiaru strat

$$\kappa = (\operatorname{tg} \varphi)^2 = \left(\frac{Q}{P}\right)^2 = 2$$

Sens i znaczenie ekonomiczne wprowadzonego wzorami (12) pojęcia mocy biernej Q dla układu rezystancyjnego z rysunku (rys.9 a) zostanie dalej wyjaśnione przy pełnej kompensacji układu na rysunkach (rys.9 b,c)



Rys.10 Odbiornik jednofazowy zasilany linią trójfazową 4 przewodową z elementami kompensacji pełnej i optymalnej  $X_m$

Podobnie jak w przykładzie 1 obliczmy straty w linii przed kompensacją oraz po kompensacji pełnej i optymalnej.

Dane:

Napięcie fazowe  $E_f=100V$ ,

Parametry linii jak na rysunku (rys.10):

rezystancja przewodów fazowa  $R_f=1\Omega$ ,

reaktancje składowych  $X_{l1}=X_{l2}=5\Omega$ ,  $X_{l0}=8\Omega$

rezystancja przewodu neutralnego  $R_n=1,5\Omega$

rezystancja odbiornika  $R=20\Omega$

a) Obliczamy prąd w linii przed kompensacją.

Dla obciążenia jednofazowego z teorii składowych symetrycznych wynika zależność

$$I_l = \frac{3E_f}{\sqrt{3R_f + 3R_n + 3R + j(X_{l1} + X_{l2} + X_{l0})}}$$

$$= \frac{300}{\sqrt{67,5^2 + 18^2}} = 4,29A$$

straty mocy w linii (w jednym przewodzie fazowym i neutralnym)

$$\Delta P = (R_f + R_n)I_l^2 = 2,5 \cdot 4,29^2 = 46,10W$$

b) Obliczamy prąd w linii po kompensacji pełnej.

W tym celu zgodnie z teorią podaną w [2] włączamy między zaciski AB kondensator o reaktancji  $X_{kAB}$ , między zaciski CA konduktor o reaktancji  $X_{kCA}$ , między zaciski BN konduktor o reaktancji  $X_{kB}$ , między zaciski CN kondensator o reaktancji  $X_{kC}$  zgodnie ze wzorami

$$X_{kAB} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot R = -51,96\Omega, \quad X_{kCA} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot R = 51,96\Omega$$

$$X_{kB} = \sqrt{3} \cdot R = 34,64\Omega, \quad X_{kC} = -\sqrt{3} \cdot R = -34,64\Omega$$

Reaktancje te symetryzują układ do gwiazdy równoważnej o rezystancji ramion

$$R_e = 3R = 60\Omega$$

stąd prąd w linii po kompensacji pełnej

$$I_l = \frac{E}{\sqrt{(R_f + R_e)^2 + X_{l1}^2}} = \frac{100}{\sqrt{61^2 + 5^2}} = 1,6339A$$

straty mocy w linii (3 przewody bez neutralnego)

$$\Delta P_l = 3R_f \cdot I_l^2 = 3 \cdot 1,6339^2 = 8,008W$$

Po kompensacji pełnej wystąpiło znaczne zmniejszenie strat o 82,6% a moc bierna skompensowanego odbiornika Q równa jest zeru ( $\kappa=0$ )

c) Reaktancja  $X_m$  kompensacji optymalnej ze względu na symetrię układu może być obliczona dla jednej fazy jak w układzie jednofazowym ze wzoru (8) i (11)

$$m = \frac{2R_f + R_e}{X_{l1}} = \frac{2 + 60}{5} = 12,4$$

stąd

$$X_m = \frac{1}{2} \left( m + \sqrt{m^2 + 4} \right) R_e = \frac{1}{2} \left( 12,4 + \sqrt{12,4^2 + 4} \right) 60 = 736,96\Omega$$

Wartość minimalna prądu dla danego  $X_m$  obliczona ze wzoru

(3) wyraża się wzorem

$$I_l = \frac{E}{\sqrt{R_f^2 + jX_{l1} + \frac{jX_m R_e}{R_e + jX_m}}} = \frac{100}{\sqrt{1 + j5 + \frac{j736,96 \cdot 60}{60 + j736,96}}} = 1,6286A$$

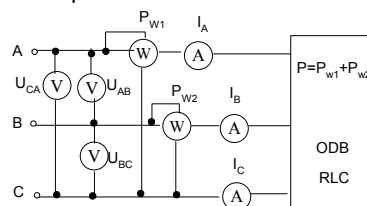
strata mocy w linii po optymalizacji

$$\Delta P_l = 3R_f I_{l_{\min}}^2 = 3 \cdot 1,6266^2 = 7,957W$$

Optymalizacja w tym przypadku nieznacznie obniża straty o 0,63%. Łącznie kompensacja pełna i optymalna zmniejsza straty o 82,7% w stosunku do stanu przed kompensacją.

### Opis realizacji metody dla układu trójfazowego 3 przewodowego

Zakładamy, że w rozważanym układzie 3 przewodowym dowolny liniowy odbiornik niesymetryczny jest zasilany układem symetrycznym napięć międzyfazowych  $U_{AB}=U_{BC}=U_{CA}=U$ . Linia trójfazowa charakteryzuje się rezystancją przewodów  $R_f$ , oraz reaktancjami dla składowych dodatniej i ujemnej  $X_{l1}=X_{l2}$ , natomiast  $X_{l0}$  jako reaktancja linii dla składowej zerowej jest pomijana, ponieważ w układzie 3 przewodowym odbiornik składowej zerowej prądu nie pobiera.



Rys.11 Odbiornik trójfazowy 3 przewodowy

Dla układu 3-przewodowego (rys.11) zgodnie z podanymi definicjami w [ 1] moc pozorna, czynna, bierna określona jest wzorami

$$(14) \quad S = \sqrt{\frac{1}{3} (U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2) (I_A^2 + I_B^2 + I_C^2)}$$

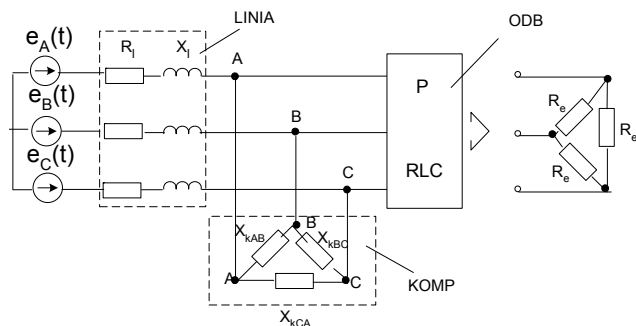
$$P = P_{W1} + P_{W2}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Zgodnie z teorią o kompensacji w układach trójfazowych przedstawioną w [1], można dobrać tak 3 elementy trójką

–kompensatora K aby moc bierna układu  $Q=0$ , a układ redukował się do trójkąta symetrycznego rezystorów o wartości  $R_e$  lub równoważnej gwiazdy rezystorów o wartości  $R_e/3$ . Elementy układu kompensatora przy sinusoidalnych napięciach mogą być zrealizowane zawsze przez elementy reaktancyjne LC. Przy symetrycznym układzie zasilającym rezystancja ekwiwalentnego trójkąta wyznaczana jest ze wzoru

$$(15) \quad R_e = \frac{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2}{P} = \frac{3U^2}{P}$$



Rys.12 Obwód trójfazowy z zasilaniem symetrycznym, kompensatorem i odbiornikiem niesymetrycznym oraz równoważny trójkąt symetryczny

**Przykład 3:**

W rozpatrywanym przykładzie odbiornikiem będzie rezystor o rezystancji  $R$  włączony między fazy AB układu trójfazowego trójprzewodowego. Podobnie jak w przykładzie 2, występuje tutaj też swojego rodzaju paradoks. Pomimo, że odbiornik rezystancyjny nie pobiera mocy biernej, w sensie mocy jednofazowej, to jednak jako układ niesymetryczny trójfazowy 3 przewodowy, zgodnie z wzorami (14,15) pobiera moc bierną absolutną w uogólnionym sensie Fryzgo, która może być skompensowana.

Obliczamy kolejno

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{3} 3U^2 2 \left(\frac{U}{R}\right)^2} = \sqrt{2} \frac{U^2}{R} = \sqrt{2} P$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2P^2 - P^2} = P$$

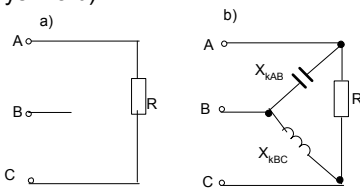
Stąd współczynnik mocy  $\lambda$  i współczynnik nadmiaru strat  $\kappa$  wynoszą dla całego układu

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \kappa = (\operatorname{tg} \varphi)^2 = \left(\frac{Q}{P}\right)^2 = 1$$

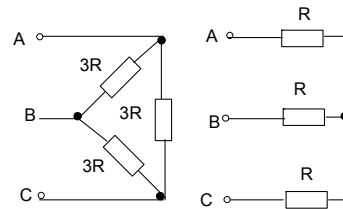
Zgodnie z metodą przedstawioną w [ 1], można wyznaczyć parametry kompensatora, który w rozważanym przykładzie zawiera dwa elementy reaktancyjne C,L określone wzorami

$$X_{kAB} = -\sqrt{3}R, \quad X_{kBC} = \sqrt{3}R$$

realizowane jako kondensator C i konduktor L jak pokazano na rysunku (rys. 13 b)

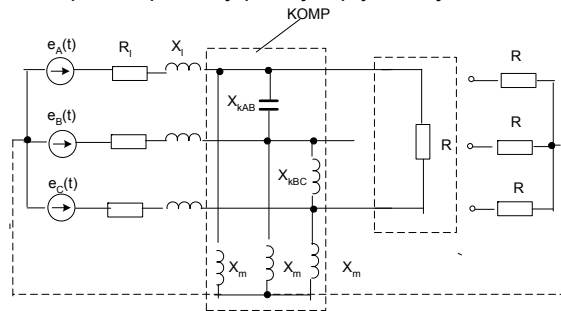


Rys.12 a) Odbiornik jako obciążenie międzyfazowe rezystorem R, b) oraz elementy LC kompensujące moc bierną



Rys.13 Układ trójkąta lub gwiazdy symetrycznej po kompensacji pełnej

Podobnie jak w przykładzie 2 obliczmy straty mocy w linii przed i po kompensacji pełnej i optymalnej.



Rys.14 Odbiornik jako obciążenie międzyfazowe z elementami kompensacji pełnej i optymalnej

**Dane:**

- Napięcie fazowe  $E_f=100V$
- Rezystancje przewodów  $R_f=1\Omega$
- Reaktancje linii dla składowych dodatniej i ujemnej  $X_{l1}=X_{l2}=5\Omega$

Reaktancja  $X_l$  na rysunku (rys. 15) jest równa  $X_{l1}$  przy obciążeniu symetrycznym czyli pełnej kompensacji. Rezystancja odbiornika  $R=20\Omega$ .

a) Obliczamy prąd w linii przed kompensacją Zgodnie z teorią składowych symetrycznych prądów w przewodach linii oblicza się ze wzoru

$$I_A = I_C = \frac{\sqrt{3}E_f}{\sqrt{2R_f + R + j(X_{l1} + X_{l2})}} = \frac{\sqrt{3}100}{\sqrt{22^2 + 10^2}} = 7,167A$$

$$I_B = 0$$

straty mocy w linii przed kompensacją

$$\Delta P_l = 2R_f I_l^2 = 2 \cdot 1 \cdot 7,167^2 = 102,73W$$

b) Obliczamy prąd w linii po kompensacji pełnej

Układ po kompensacji jest symetryczny a więc prąd może być obliczony dla jednej fazy

$$I_A = I_B = I_C = \frac{E_f}{\sqrt{R_f + R + jX_{l1}}} = \frac{100}{\sqrt{21^2 + 5^2}} = 4,632A$$

Straty mocy w linii

$$\Delta P_l = 3R_f I_l^2 = 3 \cdot 1 \cdot 4,632^2 = 64,36W$$

Otrzymany wynik oznacza, że po kompensacji pełnej występuje obniżenie strat o 37,3% a moc bierna skompensowanego odbiornika jest zerowa ( $\kappa=0$ )

c) Obliczanie kompensacji optymalnej. Reaktancja kompensacji optymalnej ze względu na symetrię układu może być obliczana dla jednej fazy (tak jak by istniał przewód neutralny), parametr kompensacji

$$m = \frac{2 \cdot R_f + R_e}{X_{l1}} = \frac{2 + 20}{5} = 4,4$$

stąd

$$X_m = \frac{1}{2} \left( m + \sqrt{m^2 + 4} \right) R_e = \frac{1}{2} \left( 4,4 + \sqrt{4,4^2 + 4} \right) \cdot 20 = 92,33 \Omega$$

Prąd w linii obliczony ze wzoru

$$I_A = I_B = I_C = \frac{E_f}{\left| R_f + R_e + jX_{l1} + \frac{R_e jX_m}{R_e + jX_m} \right|} = \frac{100}{\left| 1 + 20 + j5 + \frac{20 j92,33}{20 + j92,33} \right|} = 4,52 A$$

Straty w linii po kompensacji optymalnej

$$\Delta P_l = 3 R_f I_l^2 = 3 \cdot 1 \cdot 4,52^2 = 61,29 W$$

Po kompensacji optymalnej uzyskuje się dalsze obniżenie strat o 4,7%, a w stosunku do stanu przed kompensacją obniżenie łączne po kompensacji pełnej i optymalnej o 40,3%.

### Uwagi

Wyznaczone wartości liczbowe w rozważanych przykładach wskazują, że dla uzyskania znacznego obniżenia strat mocy w linii niezbędna jest kompensacja pełna mocy biernej. Możliwość dodatkowej redukcji strat, w znacznie mniejszym stopniu uzyskuje się w kompensacji optymalnej. Elementem realizującym kompensację optymalną jest element indukcyjny.

### Zakończenie

Rozpatrzone przykłady potwierdziły skuteczność zastosowania metody kompensacji pełnej wraz z możliwością jej optymalizacji. Szczególnie interesujące wyniki otrzymano dla przykładów niesymetrycznego obciążenia układów trójfazowych. W tym przypadku widoczne jest, że rozszerzenie koncepcji mocy biernej w sensie Fryzego na układy trójfazowe przedstawione we wcześniejszych opracowaniach autorów [1, 2, 12] jest efektywne. Warto podkreślić, że w sformułowanej metodzie; kompensacja pełna w układzie trójfazowym zawsze sprowadza się do redukcji odbiornika do symetrycznego układu gwiazdy lub trójkąta rezystorów. Natomiast układ kompensatora w ogólnym przypadku może mieć strukturę czwórbieguna zupełnego i jest realizowany przez stacjonarne elementy reaktancyjne LC.

Całością problematyki zawartej w opracowaniu jest kontynuacją wcześniej już publikowanych przez autorów zagadnień z teorii mocy, których podstawą ujęcia są równania w dziedzinie czasu [1, 2, 12]. Stanowi to rozszerzenie koncepcji Fryzego do analizy szerokiego zakresu zadań związanych z kompensacją mocy biernej w obwodach jednofazowych oraz trójfazowych liniowych i nieliniowych sinusoidalnych i niesinusoidalnych.

Celem niniejszego opracowania było przedstawienie metody obliczeń zagadnień kompensacji pełnej i optymalnej przy możliwie prostych założeniach sinusoidalnego zasilania i liniowego odbiornika. Przy tych założeniach uzyskano ściśle analityczne wyprowadzenie warunku kompensacji optymalnej. Przedstawiono możliwość interpretacji występowania warunku minimalizacji prądu na wykresie kołowym

Podana w niniejszym opracowaniu metoda kompensacji w zakresie odbiornika liniowego, może być również realizowana metodą przedstawioną w oddzielnym wcześniejszym opracowaniu [12] dotyczącym kompensacji pełnej i optymalnej dla odbiorników nieliniowych. Różnica

polega w tym przypadku na zastąpieniu optymalizacji wyznaczanej z układu równań rozwiązywanego metodą przybliżoną Newtona-Raphsona; rozwiązaniem ścisłym równania (5) i (6).

W podsumowaniu końcowym warto zaznaczyć, że w ogólnym przypadku dowolnego trójfazowego odbiornika liniowego niesymetrycznego przy zasilaniu symetrycznym układem napięć sinusoidalnych i symetrycznej linii zasilającej, rozwiązanie kompensacji optymalnej zawsze istnieje i jest realizowane przez rezystancyjną gwiazdę symetryczną  $R_e$  i czwórbiegun (ABCN) kompensatora zawierający elementy reaktancyjne L, C jak przedstawiono na rysunkach (rys. 8, 12, 14).

### LITERATURA

- [1] A.Skopec, Cz. Stec, *Moc bierna absolutna jako podstawa teorii pełnej kompensacji prądu niesinusoidalnego w dziedzinie czasu w układach jednofazowych i trójfazowych*, Przegląd Elektrotechniczny, R.87 NR 1/2011, s. 220-22
- [2] A.Skopec, Cz. Stec: *Metoda pełnej kompensacji mocy biernej absolutnej prądów niesinusoidalnych układu trójfazowego czteroprzewodowego w dziedzinie czasu*, Przegląd Elektrotechniczny, R.89, NR 1/2013, s. 175-188
- [3] A.Skopec, Cz.Stec, P.Janik, Z. Waclawek: *Teoretyczne aspekty realizacji pełnej kompensacji w obwodach prądu niesinusoidalnego*, Przegląd elektrotechniczny, R.88 NR 8/2012, s. 295-302
- [4] M. Siwczyński :*O współzależności między mocą bierną a stabilnością napięcia zasilania w przypadku okresowych niesinusoidalnych przebiegów napięcia i prądu*, Przegląd Elektrotechniczny, R. 87 NR 6/2011, s.169-173
- [5] M. Siwczyński: *Energetyczna teoria obwodów*. Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami i Energią PAN, Kraków 2003
- [6] M. Siwczyński: *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*. Monografia 183; seria „Inżynieria Elektryczna”. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995
- [7] L.S. Czarniecki, *Currents Physical Components (CPC) concept: a fundamental for power theory*, Przegląd Elektrotechniczny, R.84, NR 6/2008, s.28-37
- [8] Czarniecki L. S., *Moce w obwodach elektrycznych z niesinusoidalnymi przebiegami napięć i prądów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005
- [9] S. Fryze: *Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki*, PWN Warszawa-Wrocław, 1966, Teoria mocy w obwodach elektrycznych, 197-256
- [10] S.Fryze: *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny, NR 7/1931, s.193-203
- [11] Inveited paper: *Tutorials from International School on Nonsinusoidal Currents and Compensation*, Przegląd Elektrotechniczny, NR6/2010 s.1-56.
- [12] A.Skopec, Cz.Stec : *Metoda obliczania pełnej i optymalnej kompensacji mocy biernej nieliniowych odbiorników jednofazowych lub trójfazowych niesymetrycznych przy zasilaniu źródłami rzeczywistymi sinusoidalnym*, Przegląd Elektrotechniczny, R.90 NR 9/2014, s. 229-233

**Autorzy.** Dr hab. inż. Adam Skopec, emerytowany prof. P.Wr. Politechnika Wrocławska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław,

Dr inż. Czesław Stec, Politechnika Wrocławska, Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 53-370 Wrocław,  
E-mail: [czeslaw.stec@gmail.com](mailto:czeslaw.stec@gmail.com)