

# Metoda wyznaczania parametrów modelu Pentegowa opisującego łuk elektryczny o charakterystyce statycznej typu Ayrton

**Streszczenie.** Opisano podstawowe trudności modelowania łuków elektrycznych w szerokim zakresie amplitud wymuszeń prądowych. W celu ich pokonania zaproponowano wykorzystanie modelu matematycznego Pentegowa łuku z charakterystyką statyczną podaną przez Ayrton. Opisano sposób eksperymentalnego wyznaczania parametrów modelu z wymuszeniem sinusoidalnym. Zbudowano makromodel łuku w programie MATLAB-Simulink i drogą symulacyjną sprawdzono poprawność „metody trzech pomiarów”. Ponadto zbadano jej odporność na zakłócenia działające w obwodzie zasilającym.

**Abstract.** Fundamental difficulties in modeling of electrical arcs in wide range of current enforcement amplitudes have been described. To overcome it, usage of Pentegov mathematical model with characteristics provided by Ayrton has been proposed. A method for experimental parameters determination of model with sinusoidal enforcement has been described. Arc macromodel has been built in MATLAB-Simulink application and correctness of "three measurements method" has been checked using simulation. Its tolerance for noise in supply circuit has also been researched. (Method for determining parameters of Pentegov model, describing electrical arc with static characteristics of Ayrton type).

**Słowa kluczowe:** łuk elektryczny, model Pentegowa, wzór Ayrton, stała czasowa.

**Keywords:** electrical arc, Pentegov model, Ayrton formula, time constant.

## Wstęp

Jedną z podstawowych trudności badań symulacyjnych procesów w urządzeniach z łukiem elektrycznym jest dokładne odwzorowanie prostymi modelami jego dynamicznych charakterystyk napięciowo-prądowych, w warunkach występowania różnych zaburzeń i w szerokim zakresie zmian amplitud prądu. Popularne modele Mayra i Cassiego mogą być stosowane w ograniczonych zakresach prądowych, które z kolei zależą od różnych zewnętrznych warunków wyładowania elektrycznego [1, 2]. Podejmowane są wysiłki pokonania tych ograniczeń przez rozbudowę modeli matematycznych (np. Cassie-Masona, Reidera-Urbanka, Kukiejkova, Novikova) lub przez odpowiednie kojarzenie ze sobą prostych modeli łuku, na przykład ich łączenie w sposób szeregowy (model Habedanka [3]) lub równoległy (model hybrydowy TWV [4]). Jednak rozbudowa modeli łuku prowadzi do powstawania trudności, związanych z wyznaczaniem większej liczby poszukiwanych parametrów oraz dodatkowych nieliniowych charakterystyk statycznych, a nawet dynamicznych. W przypadku modelu hybrydowego powstają problemy określenia postaci najwłaściwszej funkcji wagowej [5] i funkcji współczynnika tłumienia [6]. Tworzone ad-hoc złożone modele matematyczne stwarzają duże trudności we właściwej interpretacji podstawowych procesów fizycznych w łuku. Przypadki graniczne tych modeli mogą dawać wyniki znacznie odbiegające od obserwowanych zjawisk fizycznych. Przykładem może być kształt charakterystyki statycznej modelu TWV [7]. Jednocześnie modele te nie w pełni wykorzystują łatwo wyznaczalne silnie nieliniowe charakterystyki statyczne napięciowo-prądowe łuku.

W celu pokonania opisanych trudności autorzy proponują wykorzystanie modelu Pentegowa [8, 9], stanowiącego jedno z najbardziej uniwersalnych podejść do zagadnień odwzorowywania procesów w łukach z dowolną charakterystyką statyczną. W rozważaniach założono, że w opisie charakterystyk dynamicznych uwzględnia się tylko zjawiska w plazmie kolumny łukowej. Natomiast jedną z znanych metod [1] zostały wyznaczone przyelektrodowe spadki napięcia. Ich wpływ na

modelowanie łuku zależy od wielu czynników i może być niewielki w przypadkach łuków długich.

## Podstawowe założenia modelu Pentegowa łuku elektrycznego

W rzeczywistym łuku inercyjnym skokowa zmiana prądu  $i(t)$  wywołuje skokowy impuls napięcia i quasi-wykładniczą zmianę rezystancji. Zamiast rzeczywistego łuku wprowadza się łuk hipotetyczny. Podobnie, jak w przypadkach budowy większości znanych modeli (np. Mayra, Casiego, Zarudiego), podstawą założeń wejściowych Pentegowa [9] jest równanie bilansu energetycznego. Jednocześnie w odróżnieniu od oryginału, model ten jest elektrycznie bezinercyjny, gdyż według założeń jego rezystancja nie zmienia się skokowo. Dlatego tę rezystancję określa się nie z wykorzystaniem prądu rzeczywistego, ale pewnego fikcyjnego prądu opóźniającego się  $i_d(t)$ , zmieniającego się z określoną stałą czasową  $\theta$  i będącego swojego rodzaju odwzorowaniem rzeczywistego prądu  $i(t)$ . W przypadku wysokiej częstotliwości  $f \gg 1/\theta$  źródła prądu przemiennego, stan cieplny łuku określa się wartością skuteczną prądu. W stanie ustalonym prąd stanu  $i_d(t)$  powinien pokrywać się z prądem rzeczywistym  $i(t)$ . Wszystkie stany, które są izoenergetyczne, są scharakteryzowane przez jedną zmienną – prąd stanu łuku  $i_d(t)$ . Podobnie za pomocą tej zmiennej można określić także parametry i charakterystyki dynamiczne modelu łuku (tab. 1).

Związek między kwadratem prądu stanu i kwadratem

Tabela 1. Definicje wielkości fizycznych kolumny łuku rzeczywistego i modelu Pentegowa ( $U_a$  – napięcie na łuku;  $\Delta U_{AK}$  – suma przyelektrodowych spadków napięcia)

Wielkość fizyczna	Łuk rzeczywisty	Model Pentegowa
Natężenie prądu elektrycznego	$i(t)$	$i(t); i_d(t) \geq 0$
Napięcie dynamiczne $u(t) = U_a(t) - \Delta U_{AK} =$	$u(i)$	$u(i_\theta) = \frac{U_{st}(i_\theta)}{i_\theta} i$
Moc rozpraszana $P_{dys}(t) =$	$P_{dys}(i) = u(i) \cdot i$	$P_{dys}(i_\theta) = U_{st}(i_\theta) \cdot i_\theta = \frac{U_{st}(i_\theta)}{i_\theta} i_\theta^2$

prądu rzeczywistego łuku opisuje różniczkowe równanie liniowe pierwszego rzędu

$$(1) \quad \theta \frac{di_{\theta}^2}{dt} + i_{\theta}^2 = i^2$$

Model Pentegowa odwzorowuje nieliniowy dwójnik obwodu, który jest:

- 1) energetycznie zbilansowany;
- 2) cieplnie inercyjny I rzędu, liniowy, stacjonarny;
- 3) elektrycznie bezinercyjny.

Do zalet tego modelu można zaliczyć możliwość wykorzystania: dowolnej aproksymacji charakterystyki napięciowo-prądowej statycznej i jednocześnie stałej wartości funkcji współczynnika tłumienia (tzw. stałej czasowej). Korzystając z tych możliwości rozpatrzmy łuk, którego charakterystykę statyczną można opisać zależnością podaną przez Ayrton

$$(2) \quad U_{st}(I, L_a) = a + bL_a + \frac{c + dL_a}{I}$$

$$= U_c + \frac{P_M}{I}$$

gdzie:  $L_a$  – stała długość łuku;  $a, b, c, d, U_c, P_M$  – stałe współczynniki aproksymacji. Tak, więc utworzony model będzie stanowił pewne uogólnienie znanych modeli Mayra i Cassiego.

### Wyznaczanie parametrów wybranego wariantu modelu Pentegowa

Założmy, że w obwodzie z łukiem o charakterystyce statycznej (2) działa wymuszenie prądowe sinusoidalnie zmienne o pulsacji  $\omega$

$$(3) \quad i = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Wówczas prąd stanu można opisać zależnością

$$(4) \quad i_{\theta}^2 = I_{sk}^2 (1 + \cos \varphi \cos 2\omega t)$$

gdzie  $I_{sk} = I_m / \sqrt{2}$  – wartość skuteczna prądu. Na podstawie definicji podanych przez Pentegowa [8], można obliczyć wartości skuteczne napięcia i wartość średnią rezystancji łuku (tab. 2). Wielkość kąta przesunięcia  $\varphi$  jest związana ze stałą czasową łuku

$$(5) \quad \sin \varphi = \frac{2\omega\theta}{\sqrt{1 + (2\omega\theta)^2}}$$

W celu wyznaczenia parametrów modelu łuku zaproponowano metodę trzech pomiarów z trzema różnymi wartościami skutecznymi prądu sinusoidalnego. Na ich podstawie określamy wartości skuteczne napięć, prądów i wartości średnie rezystancji łuku:  $(U_{sk1}, I_{sk1}, R_1)$ ,  $(U_{sk2}, I_{sk2}, R_2)$ ,  $(U_{sk3}, I_{sk3}, R_3)$ . Wtedy poszukiwane parametry modelu określają wzory [10]:

$$(6) \quad P_M = \frac{W_P}{W}$$

$$(7) \quad U_c^2 = \frac{W_U}{W}$$

gdzie wyznaczniki  $W_P, W_C$  i  $W$  są określone następująco:

$$(8) \quad W = \begin{vmatrix} 2(R_1 I_{sk1}^2 - R_2 I_{sk2}^2) & I_{sk1}^2 - I_{sk2}^2 \\ 2(R_2 I_{sk2}^2 - R_3 I_{sk3}^2) & I_{sk2}^2 - I_{sk3}^2 \end{vmatrix}$$

$$(9) \quad W_P = \begin{vmatrix} (U_{sk1} I_{sk1})^2 - (U_{sk2} I_{sk2})^2 & I_{sk1}^2 - I_{sk2}^2 \\ (U_{sk2} I_{sk2})^2 - (U_{sk3} I_{sk3})^2 & I_{sk2}^2 - I_{sk3}^2 \end{vmatrix}$$

$$(10) \quad W_U = \begin{vmatrix} 2(R_1 I_{sk1}^2 - R_2 I_{sk2}^2) & (U_{sk1} I_{sk1})^2 - (U_{sk2} I_{sk2})^2 \\ 2(R_2 I_{sk2}^2 - R_3 I_{sk3}^2) & (U_{sk2} I_{sk2})^2 - (U_{sk3} I_{sk3})^2 \end{vmatrix}$$

Natomiast stałą czasową łuku określa wzór

$$(11) \quad \theta = \frac{1}{2\omega \sqrt{\left[ \frac{2RI_{sk}^2}{P_M} + \left( \frac{U_c I_{sk}}{P_M} \right)^2 - \left( \frac{U_{sk} I_{sk}}{P_M} \right)^2 \right]^2 - 1}}$$

gdzie skojarzone wartości  $(I_{sk}, U_{sk}, R)$  mogą pochodzić z jednego pomiaru, wybranego spośród trzech.

Opisana metoda pomiarowa wykorzystuje różnice kwadratów prądów i mocy czynnej. Osiągnięcie wysokiej dokładności wymaga stosowania znacznych rozrzutów wartości amplitud trzech prądów wymuszenia. W tym przypadku funkcja kwadratowa wspomaga osiągnięcie większej precyzji. Może mieć to duże znaczenie, bo w badaniach in situ pewnym ograniczeniem zmian amplitudy prądu może być budowa i działanie źródła zasilającego lub instrumentu technologicznego, stabilność łuku oraz konieczność utrzymania odpowiednich parametrów procesu technologicznego.

Tabela 2. Definicje wielkości pomiarowych łuku rzeczywistego i modelu Pentegowa

Wielkość fizyczna	Łuk rzeczywisty	Model Pentegowa
Kwadrat prądu skutecznego, $I_{sk}^2 =$	$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$	$\frac{1}{T} \int_0^T i_{\theta}^2 dt$
Kwadrat napięcia skutecznego, $U_{sk}^2 =$	$\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt$	$\frac{1}{T} \int_0^T U_{st}^2(i_{\theta}) dt$
Wartość średnia rezystancji, $R =$	$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{u}{i} dt$	$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_{st}(i_{\theta})}{i_{\theta}} dt$

### Badania efektywności metody trzech pomiarów wyznaczenia parametrów modelu Pentegowa

W celu zbadania efektywności metody trzech pomiarów wyznaczenia parametrów modelu Pentegowa utworzono makromodele obwodów z łukiem elektrycznym w programie MATLAB-Simulink. Jako źródło wymuszające zastosowano źródło prądowe o parametrach  $I_m \approx (10 \div 200)$  A i  $f = 50$  Hz, połączone szeregowo z dławikiem o rezystancji  $R = 0,1 \Omega$  i indukcyjności  $L = 1$  mH. Aby spełnić założenia metody trzech pomiarów zadano trzy wartości amplitud prądów i wykonano trzy serie pomiarów:

1)  $I_m = 10 \pm 2$  A; 2)  $I_m = 100 \pm 8$  A; 3)  $I_m = 200 \pm 16$  A.

Ponadto badania przeprowadzono z różnymi parametrami zadanej charakterystyki statycznej (2):

- 1)  $U_c = 50$  V,  $P_M = 60$  W;
- 2)  $U_c = 100$  V,  $P_M = 80$  W;
- 3)  $U_c = 200$  V,  $P_M = 100$  W.

Przyjęta stała czasowa modelu Pentegowa wynosiła  $\theta = 5 \cdot 10^{-4}$  s. Na skutek przyjętych założeń upraszczających, uzyskane zależności analityczne (4) i (5) pomijają wpływ występowania naturalnych zakłóceń na niepewność pomiarów parametrów modelu łuku.

Tabela 3. Dokładność wyznaczania parametrów modelu Pentegowa na podstawie symulacji procesów w obwodzie z łukiem elektrycznym bez działających zakłóceń ( $I_m, P_M, U_C, \theta$  - wielkości zadane)

$I_m$	$I_{sk}$	$U_{sk}$	$R_{sr}$	$P_M$	$\delta_p$	$U_C$	$\delta_U$	$\theta$	$\delta_\theta$
A	A	V	$\Omega$	W	%	V	%	s	%
8	5,656215	66,76998	19,44717	60	0,034797	50	0,001372	0,0005	0,13815
10	7,070431	63,29582	14,55468						
12	8,48464	61,00704	11,57184						
92	66,04013	51,54935	1,172372						
100	71,78279	51,43857	1,075207						
108	77,52545	51,34428	0,992899						
184	132,0808	50,85838	0,574727						
200	143,5661	50,80333	0,527905						
216	155,0515	50,75646	0,488135						
8	5,655727	122,0262	34,72877	80	0,052201	100	0,002002	0,0005	0,204919
10	7,069953	117,495	26,44321						
12	8,484168	114,505	21,2921						
92	65,05238	101,8456	2,355646						
100	70,70919	101,6976	2,162547						
108	76,366	101,5716	1,998692						
184	130,1057	100,921	1,162014						
200	141,4194	100,8473	1,067891						
216	152,733	100,7845	0,987871						
8	5,654772	227,1631	63,21686	100	0,048357	200	0,001381	0,0005	0,325346
10	7,069004	221,6166	48,89194						
12	8,483225	217,9484	39,81						
92	65,05147	202,3053	4,664144						
100	70,70828	202,1209	4,285189						
108	76,3651	201,9638	3,963175						
184	130,1048	201,154	2,312234						
200	141,4184	201,062	2,125799						
216	152,732	200,9837	1,967185						

Tabela 4. Dokładność wyznaczania parametrów modelu Pentegowa na podstawie symulacji procesów w obwodzie z łukiem elektrycznym i z działającymi zakłóceniami ( $I_m, P_M, U_C, \theta$  - wielkości zadane)

$I_m$	$I_{sk}$	$U_{sk}$	$R_{sr}$	$P_M$	$\delta_p$	$U_C$	$\delta_U$	$\theta$	$\delta_\theta$
A	A	V	$\Omega$	W	%	V	%	s	%
8	5,74209	66,84473	19,02374	60	1,548361	50	0,348039	0,0005	2,476078
10	7,177774	63,39111	14,24717						
12	8,613452	61,11592	11,33289						
92	66,04013	51,54935	1,172372						
100	71,78279	51,43857	1,075207						
108	77,52545	51,34428	0,992899						
184	132,0808	50,85838	0,574727						
200	143,5661	50,80333	0,527905						
216	155,0515	50,75646	0,488135						
8	5,7416	122,2354	34,01148	80	1,543651	100	0,346914	0,0005	2,367748
10	7,177294	117,7321	25,91112						
12	8,612978	114,7606	20,87183						
92	66,03971	102,1768	2,314224						
100	71,78238	102,0297	2,124582						
108	77,52505	101,9045	1,963653						
184	132,0805	101,2575	1,141827						
200	143,5658	101,1843	1,049355						
216	155,0512	101,1219	0,970737						
8	5,740643	227,6912	61,9793	100	1,551058	200	0,3474	0,0005	2,245943
10	7,176344	222,1783	47,95407						
12	8,612032	218,5323	39,05735						
92	66,03886	202,9719	4,58276						
100	71,78154	202,7886	4,210498						
108	77,52421	202,6325	3,894158						
184	132,0796	201,8287	2,27222						
200	143,5649	201,7373	2,089032						
216	155,0503	201,6594	1,933176						

W celu odwzorowania zakłóceń do obwodów źródeł zasilających włączono dodatkowy generator szumu. Wykorzystano tutaj generator losowy połączony kaskadowo z członem inercyjnym pierwszego rzędu ( $T = 0,0004$  s) o maksymalnej amplitudzie  $\Delta i$  określonej procentowo względem amplitudy prądu źródła zasilania ( $\pm 5\%$ ).

Wprowadzanie w ten sposób zakłóceń pozwala sprawdzić, czy metoda ta jest odporna na zakłócenia proporcjonalne względem amplitudy prądu źródła wymuszającego. Symulacje zakłócanych makromodeli wykonywano z szumem o częstotliwości 500 Hz.

W tabeli 3 zamieszczono wyniki przeprowadzonych symulacji. Błędy  $\delta_P$ ,  $\delta_U$  i  $\delta_\theta$  wyznaczania wartości parametrów modelu są w rzeczywistości błędami obliczeń numerycznych. W przybliżeniu odwzorowują one zakłócenia w obwodzie z łukiem i w cyfrowym układzie pomiarowym. Podwyższenie poziomu zakłóceń uzyskano przez wprowadzenie dodatkowego generatora szumu (tab. 4). Z danych zawartych w tabeli 3 widać, że w przypadku idealizowanym (braku działających zakłóceń) „metoda trzech pomiarów” umożliwia wyznaczanie parametrów modelu Pentegowa z charakterystyką statyczną typu Ayrton z niepewnością nie przewyższającą kilku procent. Nieco mniejszą dokładność uzyskano w przypadku działających zakłóceń. Przy czym szczególnie mały błąd i dużą odporność na zakłócenia wykazuje wyznaczenie parametru  $U_C$ . Natomiast najmniej dokładne i najbardziej wrażliwe na działające zakłócenia jest wyznaczanie parametru  $\theta$ .

#### Wnioski:

1. Zaprezentowany model matematyczny Pentegowa łuku elektrycznego, wykorzystujący charakterystykę statyczną typu Ayrton, wyróżnia się dużą uniwersalnością, gdyż może być stosowany do symulacji procesów w obwodach z szerokim zakresem prądu wymuszającego.
2. Wykonane symulacje potwierdziły wysoką efektywność „metody trzech pomiarów” wyznaczania parametrów modelu Pentegowa.
3. Szczególnie podwyższoną niepewnością i dużą wrażliwością na zakłócenia wyróżnia się wyznaczenie stałej czasowej. Z tego powodu opisana metoda nadaje się do badań łuków: o podwyższonej stabilizacji wyładowania, za pomocą przyrządów i układów pomiarowych o podwyższonej klasie dokładności.

#### LITERATURA

- [1] Filkenburg W., Maecker H., Elektrische Bogen und thermisches Plasma, in: Handbuch der Physik. S. Flugge (ed.), Springer, Berlin 1956.

- [2] Sawicki A., Haltof M., Metoda widmowa wyznaczania stałej czasowej modelu Cassiego łuku elektrycznego płonącego w różnych warunkach fizycznych. Materiały konferencji Modelowanie i sterowanie procesów elektrotechnologicznych, Kielce, 15-17 września 2014. (w druku)
- [3] Sawicki A., Zmodyfikowane modele Habedanka i hybrydowy TWV łuku o zmiennej długości do symulowania procesów w urządzeniach elektrycznych. Biuletyn Instytutu Spawalnictwa (2012), nr 1, 45-49.
- [4] Tseng K.J., Wang Y., Vilathgamuwa D.M., Development of a dynamic model of electric arc for power electric simulations. IEEE Industrial Applications Conference, IAS'96, 4(1996), 2173-2180.
- [5] Sawicki A., Funkcje wagowe w modelach hybrydowych łuku elektrycznego. Śląskie Wiadomości Elektryczne (2012), nr 5, 15-19.
- [6] Sawicki A., Funkcja współczynnika tłumienia w modelach łuku elektrycznego prądu zmiennego. Cz. 2. Funkcja współczynnika tłumienia w modelach uniwersalnych łuku elektrycznego z umiarkowanym chłodzeniem. Biuletyn Instytutu Spawalnictwa (2013), nr 3, 37-42.
- [7] Sawicki A., Haltof M., Funkcja współczynnika tłumienia w modelach łuku elektrycznego prądu zmiennego. Cz. 4. Kryteria wyboru modelu łuku i wyznaczanie stałej czasowej łuku słaboprądowego, Biuletyn Instytutu Spawalnictwa (2014), nr 3, 56-63.
- [8] Пентегов И.В., Вопросы моделирования динамики сварочной дуги как элемента электрической цепи. Автомат. сварка (1984), № 10, 18-23.
- [9] Пентегов И.В., Сидорев В.Н., Сравнительный анализ моделей динамической сварочной дуги. Автомат. сварка (1989), № 2, 33-36.
- [10] Wąsowicz S., Identyfikacja stałej czasowej i charakterystyki statycznej w modelu Pentegowa łuku elektrycznego. Praca niepublikowana, Częstochowa 2014.

---

**Autorzy:** dr hab. inż. Antoni Sawicki, Politechnika Częstochowska, Instytut Telekomunikacji i Kompatybilności Elektromagnetycznej, Al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa, E-mail: [sawicki.a7@gmail.com](mailto:sawicki.a7@gmail.com); mgr inż. Maciej Haltof, E-mail: [maciej@haltof.pl](mailto:maciej@haltof.pl).