Zuzanna SIWCZYŃSKA

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki

doi:10.15199/48.2015.12.68

Pierwiastkowe operatory immitancji – realizacja za pomocą filtrów cyfrowych

Streszczenie. *W artykule opisano filtry cyfrowe do realizacji operatorów całko–pochodnych rzędu niecałkowitego, a także filtry ogólniejsze: całkopochodne z zero–biegunami rzeczywistymi i zespolonymi. Jako szczególne przypadki zwrócono uwagę na filtry pierwiastkowe.*

Abstract. *The article describes the implementation of digital filters in order to use with incomplete rank integral–derivative operators, it also describes more general filters: integral–derivative with a real and complex root–poles. As special cases, the square root filters were highlighted.* ***(Square root immitance operators – digital filters realization)***

Słowa kluczowe: operatory całkopochodne niecałkowite, filtry cyfrowe
Keywords: incomplete rank integral–derivative operators, digital filters

Operator różniczkowania niecałkowitego rzędu jako filtr cyfrowy

Filtrem cyfrowym A nazywa się przetwornik sygnału czasowo–dyskretnego $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ w sygnał czasowo–dyskretny $\{(Ax)_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ działający według operatora:

$$(Ax)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m x_{n-m} .$$

Tutaj rozważane będą wyłącznie filtry przyczynowe, to znaczy takie, że $A_m = 0$ dla $m < 0$.

Wprowadzając operator opóźnienia jednostkowego:

$$(zx)_n \equiv x_{n-1},$$

operator filtru można zapisać w postaci:

$$Ax = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m z^m \right) x .$$

W ten sposób filtr A uzyskuje dwie reprezentacje opisu za pomocą:

– ujęcia zespolonego (reprezentacja „z”):

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \text{ , gdzie } z \in \mathbf{C},$$

– ujęcia ciągowego (reprezentacja „n”):

$$A_n \equiv \left(A(z)\right)_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n A(z)}{dz^n} \right|_{z=0} .$$

W szczególności filtry cyfrowe symulujące układy różniczkujący i całkujący mają postać: $1-z$ oraz

$$\left(1-z\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Operator różniczkowania rzędu całkowitego „p” może być przedstawiony w postaci filtru cyfrowego:

$$A(z) = (1-z)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n A}{dz^n} \right|_{z=0} = $$

$$= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \frac{p!}{n!(p-n)!} z^n .$$

Idea uogólnienia tego rozwinięcia jako szeregu Taylora pozwala na zdefiniowanie operatora różniczkująco–całkującego rzędu ułamkowego ($-1 \le p \le 1$):

$$A(z) = (1-z)^p = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m ,$$

(1)

$$A_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n A}{dz^n} \right|_{z=0} =$$

$$= (-1)^n \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left[p-(n-1)\right]}{n!} = .$$

$$= \frac{0-p}{1}\frac{1-p}{2}\frac{2-p}{3}\frac{3-p}{4}\ldots\frac{n-1-p}{n} = \prod_{m=1}^{n} \frac{m-1-p}{m}$$

Uogólniony filtr cyfrowy różniczkująco–całkujący rzędu $-1 \le p \le 1$ z zero–biegunem a ma postać:

$$(a-z)^p = a^p \left[1-\left(a^{-1}z\right)\right]^p = a^p \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(a^{-1}z\right)^n ,$$

skąd:

(2) $$\left((a-z)^p\right)_n = a^p a^{-n} A_n = a^p a^{-n} \prod_{m=1}^{n} \frac{m-1-p}{m} .$$

Ogólnym warunkiem stabilności takiego filtru jest nierówność $a > 1$, a dla a zespolonego $|a| > 1$.

W szczególności wprowadza się zespół filtrów pierwiastkowych:

$d(z) = (1-z)^{1/2}$, $D(z) = (1-z)^{1/4}$, oraz $i(z) = (1-z)^{-1/2}$, $I(z) = (1-z)^{-1/4}$.

Dwa pierwsze są filtrami pierwiastkowymi typu różniczkującego (rzędu ½ i ¼), dwa następne to filtry typu całkującego (rzędu ½ i ¼). Odpowiednie reprezentacje ciągowe tych filtrów to:

$$d_n = \left((1-z)^{1/2}\right)_n = \prod_{m=1}^{n} \frac{2m-3}{2m} = \frac{-1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\ldots\frac{2n-3}{2n},$$

$$i_n = \left((1-z)^{-1/2}\right)_n = \prod_{m=1}^{n} \frac{2m-1}{2m} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\ldots\frac{2n-1}{2n},$$

$$D_n = \left((1-z)^{1/4}\right)_n = \prod_{m=1}^{n} \frac{4m-5}{4m} = \frac{-1}{4}\frac{3}{8}\frac{7}{12}\frac{11}{16}\ldots\frac{4n-5}{4n},$$

$$I_n = \left((1-z)^{-1/4}\right)_n = \prod_{m=1}^{n} \frac{4m-3}{4m} = \frac{1}{4}\frac{5}{8}\frac{9}{12}\frac{13}{16}\ldots\frac{4n-3}{4n},$$

dla $n = 1,2,3,\ldots$.

Pierwiastkowe filtry cyfrowe operatorów falowych

W teorii linii długiej występują dwa operatory falowe:

– impedancja falowa:

$$Z=\sqrt{\frac{R+sL}{G+sC}}\,,$$

– operator propagacji:

$$\Gamma=\sqrt{(R+sL)(G+sC)}\,,$$

gdzie: $s={d}/{dt}$, R,L,G,C – rezystancja, indukcyjność, upływność, pojemność linii na jednostkę długości. Odpowiednie filtry cyfrowe otrzymuje się z użyciem podstawienia $s\to\frac{1}{\tau}(1-z)$:

$$Z(z)=\rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\,,\quad \Gamma(z)=\gamma\sqrt{(a-z)(b-z)}\,,$$

gdzie: $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$, $a=1+\frac{\tau}{\tau_L}$, $b=1+\frac{\tau}{\tau_C}$, $\tau_L=\frac{L}{R}$, $\tau_C=\frac{C}{G}$, $\gamma=\sqrt{LC}$,

stąd otrzymuje się realizacje ciągowe poszczególnych filtrów z użyciem splotów:

$$\left(\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\right)_n=\sqrt{\frac{a}{b}}\left\{a^{-n}d_n\right\}*\left\{b^{-n}i_n\right\}=\\=\sqrt{\frac{a}{b}}a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m d_{n-m}i_m\,,$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{a-z}{b-z}}\right)_n=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\left\{a^{-n}D_n\right\}*\left\{b^{-n}I_n\right\}=\\=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m D_{n-m}I_m\,,$$

oraz:

$$\left(\sqrt{(a-z)(b-z)}\right)_n=\sqrt{ab}\left\{a^{-n}d_n\right\}*\left\{b^{-n}d_n\right\}=\\=\sqrt{ab}\,a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m d_{n-m}d_m\,.$$

W szczególności w teorii nieskończonych obwodów drabinkowych występuje też operator z zespolonym zerem a:

$$\left(\sqrt{(a-z)(a^*-z)}\right)_n==|a|^{1-n}\sum_{m=0}^{n}d_{n-m}d_m\cos\left(\left|(n-m)-m\right|\sphericalangle a\right)\cdot$$

Analogicznie otrzymuje się ciągowe reprezentacje filtrów cyfrowych:

$$\left(\left(\sqrt{(a-z)(b-z)}\right)^{-1}\right)_n=\left(\sqrt{ab}\right)^{-1}a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m i_{n-m}i_m$$

,oraz w szczególności:

$$\left(\left(\sqrt{(a-z)(a^*-z)}\right)^{-1}\right)_n=|a|^{-1-n}\sum_{m=0}^{n}i_{n-m}i_m\cos\left(\left|(n-m)-m\right|\sphericalangle a\right)$$

.

Stosując metodę wielokrotnych splotów można otrzymywać ciągowe reprezentacje cyfrowych filtrów pierwiastkowo–wymiernych.

Przykładowo:

$$\left(\sqrt{\frac{(a_1-z)(a_2-z)}{(b_1-z)(b_2-z)}}\right)_n=\sqrt{\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}\left\{a_1^{-n}d_n\right\}*\left\{a_2^{-n}d_n\right\}*\left\{b_1^{-n}i_n\right\}*\left\{b_2^{-n}i_n\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}\left\{\underbrace{a_1^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^m d_{n-m}d_m}_{k_n^{a_1a_2}}\right\}*\left\{\underbrace{b_1^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^m i_{n-m}i_m}_{k_n^{b_1b_2}}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}\,a_1^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^m k_{n-m}^{a_1a_2}k_m^{b_1b_2}$$

W szczególności:

$$\left(\sqrt{\frac{(a-z)(a^*-z)}{(b-z)(b^*-z)}}\right)_n=$$

$$=\frac{|a|}{|b|}\left\{\underbrace{|a|^{-n}\sum_{m=0}^{n}d_{n-m}d_m\cos\left(\left|(n-m)-m\right|\sphericalangle a\right)}_{k_n^a}\right\}*\\ *\left\{\underbrace{|b|^{-n}\sum_{m=0}^{n}i_{n-m}i_m\cos\left(\left|(n-m)-m\right|\sphericalangle b\right)}_{k_n^b}\right\}=\\ =\frac{|a|}{|b|}|a|^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^m k_{n-m}^a\,k_n^b\,.$$

Wnioski

Istniejąca teoria operatorów różniczkowania rzędu niecałkowitego czasu ciągłego okazuje się mało przydatna w sytuacjach praktycznych. Wydaje się, że o wiele lepsze jest podejście w czasie dyskretnym, tj. z użyciem pojęcia filtru cyfrowego. W artykule wprowadzono filtr cyfrowy realizujący uniwersalny operator całko–pochodny rzędu $-1\le p\le 1$, a w szczególności filtrów pierwiastkowych, tj. rzędu $p=\pm{1}/{2}$ i $p=\pm{1}/{4}$ przydatnych podczas modelowania cyfrowego operatorów falowych linii przesyłowych ze stratami rozłożonymi. Pokazano też uogólnienia na operatory pierwiastkowo–wymierne z zespolonymi zero–biegunami.

LITERATURA

[1] Atici F. M., Eloe P. W.: A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations (IJDE)*, 2 (2007), n. 2, 165-176

[2] Li Y., Sheng H., Chen Y. Q.: Analytical impulse response of a fractional second order filter and its impulse response invariant discretization, *Signal Processing*, 91 (2011), n. 3, 498-507

[3] Siwczyński M., Jaraczewski M.: Zastosowanie operatorów różniczkowania rzędu ułamkowego do wyznaczania przepięć wywołanych prądami udarowymi w długich uziomach, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 10a, 55-58

***Autorzy**: dr inż. Zuzanna Siwczyńska, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: zsiw@pk.edu.pl.*