Zuzanna SIWCZYŃSKA

Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki

doi:10.15199/48.2015.12.67

Modele cyfrowe nieskończonych obwodów elektrycznych – operatory pierwiastkowe

Streszczenie. *W artykule przedstawiono pewne nowe wyniki dotyczące modelowania nieskończonych elektrycznych obwodów drabinkowych oraz linii długich ze stratami rozłożonymi za pomocą filtrów cyfrowych realizujących całko–pochodne złożone operatory rzędu 1/2 z rzeczywistymi i zespolonymi zero–biegunami.*

Abstract. *The article presents some new results on the modeling of endless ladder electrical circuits and transmission lines with spread loses through digital filters which realizes the integral–derivative composite 1/2 rank operators with real and complex root–poles.* (***Infinite electrical circuits digital models – square root operators***)

Słowa kluczowe: całko–pochodne operatory rzędu 1/2, filtry cyfrowe typu IIR, obwody nieskończone, obwody o parametrach rozłożonych
Keywords: 1/2 rank integral–derivative operators, IIR–type digital filters, endless circuits, circuits with distributed parameters

Biblioteka całko–pochodnych filtrów cyfrowych rzędu niecałkowitego

Filtr cyfrowy A może posiadać dwie reprezentacje:
– reprezentację zespoloną „z”, $z \in \mathbf{C}$:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \ ,$$

– reprezentację ciągową (czasową „n”):

$$A_n \equiv \big(A(z)\big)_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n A(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0} .$$

Całko–pochodny filtr cyfrowy rzędu niecałkowitego $-1 \le p \le 1$ z pojedynczym zero–biegunem a ma reprezentację ciągową [6]:

$$\Big(\big(a-z\big)^p\Big)_n = a^p a^{-n}\Big(\big(1-z\big)^p\Big)_n = a^p a^{-n}\prod_{m=1}^{n}\frac{m-1-p}{m},$$

przy warunku początkowym: $\big(A(z)\big)_0 = A(z)\big|_{z=0}$.

Można tu wymienić dwa szczególne pierwiastkowe cyfrowe filtry całko–pochodne: różniczkujący „d” i całkujący „i”, których reprezentacje czasowo–ciągowe są następujące:

$$d_n \equiv \Big(\big(1-z\big)^{1/2}\Big)_n = \prod_{m=1}^{n}\frac{2m-3}{2m} = \frac{-1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-3}{2n},$$

$$i_n \equiv \Big(\big(1-z\big)^{-1/2}\Big)_n = \prod_{m=1}^{n}\frac{2m-1}{2m} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

Przedstawione filtry dają podstawę do utworzenia następujących filtrów, bardziej złożonych, otrzymywanych za pomocą splotów:
– filtr pierwiastkowy z pojedynczym zero–biegunem:

$$\left(\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\right)_n = \sqrt{\frac{a}{b}}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m d_{n-m} i_m \ ,$$

– filtr pierwiastkowy z dwoma zerami:

$$\left(\sqrt{(a-z)(b-z)}\right)_n = \sqrt{ab}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m d_{n-m} d_m \ ,$$

– filtr pierwiastkowy z dwoma biegunami:

$$\left(\left(\sqrt{(a-z)(b-z)}\right)^{-1}\right)_n = \left(\sqrt{ab}\right)^{-1} a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m i_{n-m} i_m \ ,$$

– filtr pierwiastkowy z zerem zespolono–sprzężonym:

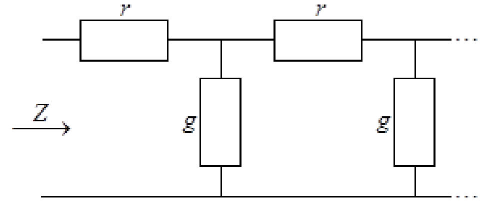
$$\left(\sqrt{(a-z)(a^*-z)}\right)_n = |a|^{1-n}\sum_{m=0}^{n} d_{n-m} d_m \cos\Big(\big|(n-m)-m\big| \sphericalangle a\Big),$$

– filtr pierwiastkowy z biegunem zespolono–sprzężonym:

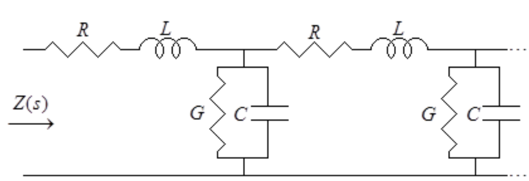
$$\left(\left(\sqrt{(a-z)(a^*-z)}\right)^{-1}\right)_n = |a|^{-1-n}\sum_{m=0}^{n} i_{n-m} i_m \cos\Big(\big|(n-m)-m\big| \sphericalangle a\Big).$$

Nieskończone obwody drabinkowe

Na rysunku 1 przedstawiono schemat nieskończonego, jednorodnego obwodu drabinkowego r, g.



Rys.1. Nieskończony, jednorodny obwód drabinkowy r, g.



Rys.2. Obwód drabinkowy RL, GC.

Impedancja wejściowa drabinki spełnia równanie rekurencyjne:

$$Z_{n+1} = r + \frac{1}{g + \dfrac{1}{Z_n}},$$

skąd wynika, że graniczna wartość $Z_n \to Z$ spełnia równanie:

$$Z = r + \frac{1}{g + \frac{1}{Z}},$$

prowadzące do równania kwadratowego:

$$gZ^2 - rgZ - r = 0.$$

Równanie to ma jedno użyteczne rozwiązanie:

$$Z = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\sqrt{4 + rg}.$$

Dla drabinki nieskończonej (rys. 2) można to rozwiązanie zaadoptować poprzez podstawienia operatorowe: $r \to R + sL$, $g \to G + sC$ $\left(s \equiv d/dt\right)$, otrzymując operator impedancji drabinki:

$$Z(s) = \frac{1}{2} L\left[\left(a+s\right) + \sqrt{\frac{a+s}{b+s}}\sqrt{4\omega^2 + ab + \left(a+b\right)s + s^2}\right],$$

gdzie: $a = \frac{R}{L}$, $b = \frac{G}{C}$, $\omega^2 = \frac{1}{LC}$.

Dokonując rozkładu operatora:

$$ab + 4\omega^2 + \left(a+b\right)s + s^2 = \left(\sigma + s\right)\left(\sigma^* + s\right),$$

gdzie: $\sigma = \frac{a+b}{2} + j\sqrt{\left(2\omega\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$,

operatorowi $Z(s)$ nadaje się postać:

$$Z(s) = \frac{1}{2} L\left[\sqrt{\frac{a+s}{b+s}}\sqrt{\left(\sigma+s\right)\left(\sigma^*+s\right)} + \left(a+s\right)\right].$$

Odpowiedni filtr cyfrowy otrzymuje się poprzez modelowanie operatora różniczkowania $s \to \frac{1}{\tau}\left(1-z\right)$:

$$\left(a+s\right) \to \left(a + \frac{1}{\tau}\left(1-z\right)\right) = \frac{1}{\tau}\left(\left(1+a\tau\right) - z\right).$$

Tak więc stosując następujące podstawienia modelowania cyfrowego: $a \to 1 + a\tau$, $b \to 1 + b\tau$, $\sigma \to 1 + \sigma\tau$ otrzymuje się filtr cyfrowy impedancji wejściowej drabinki nieskończonej:

$$Z(z) = \frac{1}{2}\frac{L}{\tau}\left[\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\sqrt{\left(\sigma - z\right)\left(\sigma^* - z\right)} + \left(a - z\right)\right].$$

Realizacje ciągowe składowych filtrów cyfrowych są następujące:

$$\left(\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\right)_n = \sqrt{\frac{a}{b}}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^m d_{n-m} i_m = \sqrt{\frac{a}{b}}\, a^{-n} k_n^{ab},$$

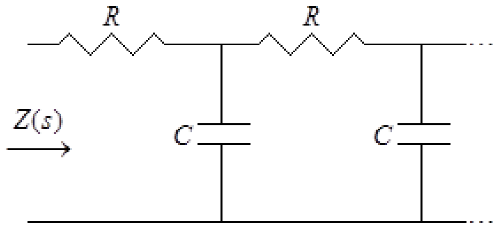
$$\left(\sqrt{\left(\sigma-z\right)\left(\sigma^*-z\right)}\right)_n = \left|\sigma\right|^{1-n}\sum_{m=0}^{n} d_{n-m} d_m \cos\left(\left|\left(n-m\right)-m\right| \sphericalangle\sigma\right) = \left|\sigma\right|\left|\sigma\right|^{-n} k_n^{\sigma},$$

$$\left(\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\sqrt{\left(\sigma-z\right)\left(\sigma^*-z\right)}\right)_n = \left\{\left(\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\right)_n\right\} * ,$$

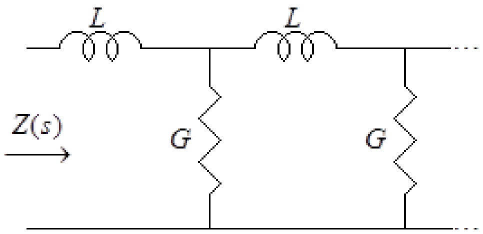
$$* \left\{\left(\sqrt{\left(\sigma-z\right)\left(\sigma^*-z\right)}\right)_n\right\} = \left|\sigma\right|\sqrt{\frac{a}{b}}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{\left|\sigma\right|}\right)^m k_{n-m}^{ab} k_m^{\sigma}$$

$$\left(a-z\right)_n = a\, a^{-n}\prod_{m=1}^{n}\frac{m-2}{m}.$$

Jako szczególne przypadki można rozpatrywać drabinki „*RC*” (rys. 3) i drabinki „*LG*” (rys. 4).



Rys.3. Drabinka „*RC*”.



Rys.4. Drabinka „*LG*”.

Dla drabinki „*RC*”:

$$Z(s) = \frac{1}{2} R\left(1 + \sqrt{\frac{\frac{4}{RC} + s}{s}}\right),$$

a dla drabinki „*LG*”:

$$Z(s) = \frac{1}{2} L\left(\sqrt{s}\sqrt{\frac{4}{LG} + s} + s\right).$$

Odpowiednie filtry cyfrowe, dla „*RC*”:

$$Z(z) = \frac{1}{2} R\left(1 + \sqrt{\frac{a-z}{1-z}}\right),\quad a = 1 + 4\frac{\tau}{RC},$$

oraz dla „*LG*”:

$$Z(z) = \frac{1}{2}\frac{L}{\tau}\left(\sqrt{\left(1-z\right)\left(a-z\right)} + \left(1-z\right)\right),\quad a = 1 + 4\frac{\tau}{LG}.$$

Realizacje ciągowe odpowiednich filtrów składowych mają postać:

$$\left(\sqrt{\frac{a-z}{1-z}}\right)_n = \sqrt{a}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n} a^m d_{n-m} i_m,$$

$$\left(\sqrt{\left(a-z\right)\left(1-z\right)}\right)_n = \sqrt{a}\, a^{-n}\sum_{m=0}^{n} a^m d_{n-m} d_m,$$

$$\left(1-z\right)_n = \prod_{m=1}^{n}\frac{m-2}{m}.$$

Model cyfrowy linii długiej „*RLGC*”

Równania różniczkowe rozkładu napięciowo–prądowego wzdłuż linii długiej mają postać:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t},$$

a model cyfrowy uzyskuje postać równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych:

$$-\frac{du}{dx}=\rho(a-z)i\,,\quad -\frac{di}{dx}=\rho^{-1}(b-z)u\,,$$

gdzie: $x=\frac{\dot{x}}{\omega\tau}$, $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{1}{\tau}(1-z)$,

$a=1+\frac{R}{L}\tau$, $b=1+\frac{G}{C}\tau$.

Ten sam układ w formie macierzowej ma postać:

$$-\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}u\\ i\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}u\\ i\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix}0 & \rho(a-z)\\ \rho^{-1}(b-z) & 0\end{bmatrix},$$

a jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{bmatrix}u\\ i\end{bmatrix}=e^{-x\mathbf{A}}\begin{bmatrix}u^0\\ i^0\end{bmatrix}.$$

Macierzowy funkcyjny [5] filtr cyfrowy $e^{-x\mathbf{A}(z)}$ można określić za pomocą macierzowo–operatorowej rozszerzonej wersji całkowego wzoru Cauchy'ego:

$$e^{-x\mathbf{A}}=\frac{1}{2\pi j}\int_{CSp\mathbf{A}}\frac{e^{-x\lambda}}{\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}}d\lambda\,,$$

gdzie: $\mathbf{I}$ – macierz jednostkowa, $CSp\mathbf{A}$ – kontur obejmujący widmo macierzowe $Sp\mathbf{A}$ operatora $\mathbf{A}$, tj.:

$$Sp\mathbf{A}=\left\{\lambda:\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=\lambda^2-A^2=0\right\}=\left\{A,-A\right\},$$

gdzie: $|\bullet|$ – symbol wyznacznika macierzy,

$A(z)=\sqrt{(a-z)(b-z)}\leftrightarrow\left\{A_n\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$ – cyfrowy filtr zwany propagacyjnym.

Realizacja wzoru Cauchy'ego przebiega następująco:

$$e^{-x\mathbf{A}}=\frac{1}{2\pi j}\int_{CSp\mathbf{A}}\frac{\begin{bmatrix}\lambda & \rho(a-z)\\ \rho^{-1}(b-z) & \lambda\end{bmatrix}}{(\lambda-A)(\lambda+A)}e^{-x\lambda}d\lambda=$$

$$=\left.\frac{\begin{bmatrix}\lambda & \rho(a-z)\\ \rho^{-1}(b-z) & \lambda\end{bmatrix}}{\lambda+A}e^{-x\lambda}\right|+\left.\frac{\begin{bmatrix}\lambda & \rho(a-z)\\ \rho^{-1}(b-z) & \lambda\end{bmatrix}}{\lambda-A}e^{-x\lambda}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\\ \rho^{-1}\sqrt{\frac{b-z}{a-z}} & 1\end{bmatrix}e^{-xA}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}\\ -\rho^{-1}\sqrt{\frac{b-z}{a-z}} & 1\end{bmatrix}e^{xA}.$$

Realizacje ciągowe filtrów–operatorów składowych, tj.: $A=\sqrt{(a-z)(b-z)}$, $Z=\rho\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}$ (impedancji falowej) oraz $Y=\rho^{-1}\sqrt{\frac{b-z}{a-z}}$ znajdują się w bibliotece całko–pochodnych filtrów pierwiastkowych w pierwszym rozdziale artykułu. Pojawiają się też filtry cyfrowe funkcyjne $e^{\pm xA}$ [6], których realizacje ciągowe wyznacza się ze wzorów rekurencyjnych:

$$\left(e^{xA}\right)_n=x\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\left(e^{xA}\right)_{n-m},\quad \left(e^{xA}\right)_0=e^{xA_0}.$$

Definiując cyfrowe filtry hiperboliczne [4]:

$$chxA\equiv\frac{1}{2}\left(e^{xA}+e^{-xA}\right),\quad shxA\equiv\frac{1}{2}\left(e^{xA}-e^{-xA}\right),$$

otrzymuje się inną postać operatora macierzowego:

$$e^{x\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}chxA & ZshxA\\ YshxA & chxA\end{bmatrix}.$$

Realizacje ciągowe filtrów hiperbolicznych można otrzymać z realizacji filtrów $e^{\pm xA}$:

$$\left(chxA\right)_n\equiv\frac{1}{2}\left(e_n^{xA}+e_n^{-xA}\right),\quad \left(shxA\right)_n\equiv\frac{1}{2}\left(e_n^{xA}-e_n^{-xA}\right),$$

albo z zastosowaniem algorytmu rekurencyjnego („krzyżowego") [6]:

$$\begin{bmatrix}chxA\\ shxA\end{bmatrix}_n=x\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}A_m\begin{bmatrix}chxA\\ shxA\end{bmatrix}_{n-m},$$

$$\begin{bmatrix}chxA\\ shxA\end{bmatrix}_0=\begin{bmatrix}chxA_0\\ shxA_0\end{bmatrix}.$$

Wnioski

W artykule podano realizacje ciągowo–czasowe następujących funkcyjnych filtrów cyfrowych: $(a-z)^p$ gdzie $-1\le p\le 1$, $\sqrt{\frac{a-z}{b-z}}$, $\left(\sqrt{(a-z)(b-z)}\right)^{\pm1}$, $\left(\sqrt{(a-z)(a^*-z)}\right)^{\pm1}$, $e^{\pm xA(z)}$ gdzie $A(z)=\sqrt{(a-z)(b-z)}$. Pokazano, że są one składowymi filtrami modeli cyfrowych niektórych nieskończenie długich elektrycznych obwodów drabinkowych, a także linii długich *RLGC*.

LITERATURA

[1] Atici F. M., Eloe P. W.: A transform method in discrete fractional calculus, *International Journal of Difference Equations (IJDE)*, 2 (2007), n. 2, 165-176

[2] Li Y., Sheng H., Chen Y. Q.: Analytical impulse response of a fractional second order filter and its impulse response invariant discretization, *Signal Processing*, 91 (2011), n. 3, 498-507

[3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów rzędu ułamkowego typu wykładniczego do analizy układów o parametrach rozłożonych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 2, 184-190

[4] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Zastosowanie cyfrowych filtrów hiperbolicznych rzędu ułamkowego do analizy procesów falowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 5a, 218-222

[5] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Filtry cyfrowe pierwiastkowo–wykładnicze zmiennej przestrzennej w teorii linii długiej, *Przegląd Elektrotechniczny*, 88 (2012), nr 3a, 139-147

[6] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: The digital function filters – algorithms and applications, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 61 (2013), n. 2, 371-377

[7] Tseng C. C.: Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators, *Signal Processing*, 87 (2007), n. 5, 1045-1057

[8] Chen Y. Q., Vinagre B. M.: A new IIR–type digital fractional order differentiator, *Signal Processing*, 83 (2003), n. 11, 2359-2365

***Autorzy**: dr inż. Zuzanna Siwczyńska, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: zsiw@pk.edu.pl.*