

## Rozkłady G, B operatorów dwójników elektrycznych i ich zaburzenia modulacyjne

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono modyfikację rachunku operatorów sygnałów impulsowych i okresowych na sygnały w modulowanych stanach nieustalonych, rozumianych jako ciągłe przejście pomiędzy jednym okresowym stanem ustalonym, a innym, również okresowym. Wykazano matematycznie słuszność i prawidłowość wprowadzenia modulacji operatorów opisujących układ jako zaburzeń. Wyznaczono modyfikację pojedynczych układów elementarnych oraz złożonych z nich „czwórek elementarnych” hermitowskiej i antyhermitowskiej, będących bazą zadań optymalizacyjnej teorii mocy. Przedstawiono również algorytm wyznaczania składowych prądu w dziedzinie czasu zawierających modulacyjną modyfikację za pomocą spłotów cyklicznych dla odbiornika energii opisanego operatorem admitancyjnym.

**Abstract.** The article presents a modification of the pulse and periodic operational calculus to the transient state modulated signals, understood as a continuous transition between one periodic steady-state to another, also periodic. The validity and accuracy of application modulated operators as signal disruptions has been mathematically proved. Modification of a single elementary system and containing them “elemental-four” symmetric and anti-symmetric, which is base of the optimization tasks, were presented. The paper also presents the algorithm for determining the current components containing a modulation modification in the time domain by the circular convolutions for operator described admittance energy receiver. (**The G, B operator distributions for two-terminal circuits and their modulation disruptions**)

**Słowa kluczowe:** rachunek operatorowy, modulacja sygnałów, zaburzenie operatorów, składowe czynne prądu, stany nieustalone.

**Keywords:** operational calculus, signal modulation, operator's disruption, active current components, transient states.

### Wprowadzenie

Głównym zadaniem teorii mocy obwodu z pojedynczym energetycznym portem wejściowym jest rozkład wymiernego operatora admitancyjnego obwodu  $Y(s)$

( $s = d/dt$ ) na sumę:

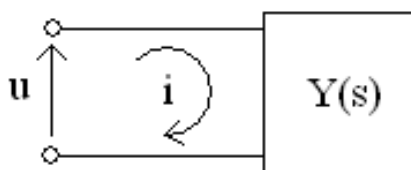
$$Y(s) = G(s) + B(s),$$

gdzie  $G(s)$  jest operatorem hermitowskim, tj. takim że  $G(-s) = G(s)$ , a  $B(s)$  operatorem antyhermitowskim, to znaczy, że  $B(-s) = -B(s)$ . Rozkład taki umożliwia wydzielenie z sygnału prądu  $i(t)$  w obwodzie składowej czynnej  $i_G(t) = Gu(t)$  tak, że:

$$(u, i) = (u, i_G) \text{ oraz } (i, i) = (i_G, i_G) + (i_B, i_B),$$

gdzie  $i_B(t)$  jest składową bierną, która szkodliwie powiększa wartość skuteczną sygnału prądu  $i(t)$ .

Dotychczasowa teoria mocy podaje praktyczne wyniki jednak tylko dla ustalonych stanów periodycznych. Potrzebne jest jej rozszerzenie także na stany nieustalone. Stan nieustalony rozumiany jest tu jako ciągły proces przejścia układu z jednego okresowego stanu ustalonego do innego, również okresowego stanu ustalonego. Można go zrealizować za pomocą okresowego sygnału zmodulowanego. Podanie takiego sygnału na wejście układu powoduje zniekształcenia operatorów  $G(s)$  i  $B(s)$  zwane dalej zniekształceniami modulacyjnymi, które wprowadzają do stanu periodycznego pewne nieperiodyczne filtry korekcyjno-zaburzeniowe. Znalazienie stosunkowo prostych wzorów matematycznych dla tych filtrów jest celem niniejszego artykułu. Znamienne jest to, że filtry korekcyjne realizowane są bezpośrednio w dziedzinie czasu, za pomocą operatorów spłotowych co będzie umożliwiało zastosowanie filtrów cyfrowych.



Rys.1. Fragment obwodu zawierający odbiornik admitancyjny.

Analizując układ dwójnika elektrycznego, opisanego operatorem admitancji  $Y(s)$ , będącego odbiornikiem energii elektrycznej, zastosowano przekształcenie matematyczne:

$$Y(s) = \frac{1}{2}[Y(s) + Y(-s)] + \frac{1}{2}[Y(s) - Y(-s)],$$

które ma na celu rozkład operatora odbiornika na operatory hermitowskie i antyhermitowskie, wykorzystywane do opisu zjawisk energetycznych zachodzących w układzie.

Wprowadzono operator hermitowski (symetryczny):

$$G(s) = \frac{1}{2}[Y(s) + Y(-s)]$$

oraz operator antyhermitowski (skośnie-symetryczny):

$$B(s) = \frac{1}{2}[Y(s) - Y(-s)],$$

o własnościach:  $G(s) = G(-s)$  oraz  $B(s) = -B(-s)$ .

Dzięki temu rozkładowi można wyodrębnić równoważny rozkład prądu na składowe: czynną  $i_G$  i bierną  $i_B$ :

$$i = Yu = (G + B)u = Gu + Bu = i_G + i_B,$$

Które są względem siebie ortogonalne [1], dlatego kwadrat normy prądu wynosi:

$$\|i\|^2 = (i_G + i_B, i_G + i_B) = \|i_G\|^2 + \|i_B\|^2.$$

W [1] przedstawiono, że prąd  $i_B$  nie przenosi energii do odbiornika, a jedynie powoduje szkodliwe powiększenie normy prądu całkowitego  $i$ , dlatego korzystne byłoby jego minimalizowanie.

### Modulacyjne zakłócenie operatorów

Wprowadzenie modulacji do rachunku operatorowego ma na celu matematyczne przybliżenie opisu zjawisk energetycznych w modulowanych stanach nieustalonych, tj. przejścia z jednego periodycznego stanu w drugi za pomocą tzw. „poprawki modulacyjnej”.

Uzasadniając wprowadzenie czasowo zależnej poprawki modulacyjnej posłużono się wyprowadzeniem częstotliwościowym.

$$x(t) = X(t)e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t) = Y(t)e^{j\omega t}$$

Rys.2. Przechodzenie sygnału zmodulowanego przez układ liniowy, czasowo niezmienniczy o transmitancji  $H(s)$ .

Na rysunku 2 przedstawiono działanie sygnału sinusoidalnego, monoharmonicznego na układ  $H(s)$ , gdzie:  $x(t)$ ,  $y(t)$  – sygnał wejściowy (wyjściowy),  $X(t)$ ,  $Y(t)$  – amplituda sygnału wejściowego (wyjściowego) zależna od czasu,  $e^{j\omega t}$  – sygnał nośny (sinusoida).

W powyższym przypadku wyznaczenie transformaty Laplace'a sygnału wejściowego  $x(t)$  oraz wyjściowego  $y(t)$  przebiega analogicznie według wzoru:

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \left[ X(t)e^{j\omega t} \right](s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\omega t} e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-(s-j\omega)t} dt = \bar{X}(s-j\omega) \end{aligned}$$

gdzie zamieniając zmienne  $s-j\omega \rightarrow s$  ( $s \rightarrow s+j\omega$ ) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= H(s)\bar{x}(s) \Rightarrow \\ (1) \quad &\Rightarrow \bar{Y}(s-j\omega) = H(s)\bar{X}(s-j\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{Y}(s) = H(s+j\omega)\bar{X}(s) \end{aligned}$$

Dzięki temu modulacja sygnałów wejściowego i wyjściowego zostaje „przeniesiona” na transmitancję opisującą układ.

Rozwijając (1) w szereg potęgowy względem  $s$ , pomijając dalsze wyrazy otrzymuje się:

$$(2) H(s+j\omega) = H(j\omega) + \frac{dH}{dj\omega} s = H(j\omega) - j \frac{dH}{d\omega} s$$

Dla sygnału wieloharmonicznie zmodulowanego sygnały wejścia  $x(t)$  i wyjścia  $y(t)$  mają postać:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{jn\omega}(t)e^{jn\omega t} \\ y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{jn\omega}(t)e^{jn\omega t} \end{cases}$$

gdzie:  $X_{jn\omega}(t)$ ,  $Y_{jn\omega}(t)$  – widma chwilowe  $n$ -tej harmonicznej, zatem zależność opisująca układ ma postać:

$$(3) \quad \bar{Y}_{jn\omega}(s) = H(s+jn\omega)\bar{X}_{jn\omega}(s)$$

Działanie operatora  $H(s)$  na sygnał wieloharmonicznie zmodulowany, zgodnie z (2), przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} H(s+jn\omega) &= H(jn\omega) + \frac{dH}{djn\omega} s = \\ &= H(jn\omega) - j \frac{dH}{dn\omega} s \end{aligned}$$

zatem wyrażenie (3) przedstawia się jako:

$$\bar{Y}_{jn\omega}(s) = \left[ H(jn\omega) - j \frac{dH}{dn\omega} s \right] \bar{X}_{jn\omega}(s)$$

Uogólniając rozważanie na sygnały nieokresowe, tj. sygnały wejściowe  $x(t)$  i wyjściowe  $y(t)$  postaci:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{X}(s,t)e^{st} ds \\ y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{Y}(s,t)e^{st} ds \end{cases}$$

gdzie:  $\bar{X}(s,t)$ ,  $\bar{Y}(s,t)$  – chwilowe widma ciągłe, otrzymuje się:

$$\bar{Y}(s,t) = \left[ H(s) + \frac{dH}{ds} \frac{d}{dt} \right] \bar{X}(s,t)$$

Dzięki wyprowadzeniu i wykazaniu słuszności teorii częstotliwościowej modulacji można wprowadzić modulację czasowo zależną, tj:

$$\frac{d}{dt} \xrightarrow{MOD} \frac{d}{dt} + \frac{d}{d\tau} \quad \left( s \xrightarrow{MOD} s + \sigma \right),$$

gdzie:  $s = d/dt$  – operator różniczkowania sygnału,

$t \in [0, T)$ ,  $\sigma = d/d\tau$  – pochodna obwiedniowa,

zaburzenie modulacyjne, poprawka modulacyjna.

Tak więc operator  $Y(s)$  poddany zakłóceniu modulacyjnemu można rozwinąć w szereg potęgowy:

$$Y(s) \xrightarrow{MOD} Y\left(s + \frac{d}{d\tau}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n$$

oraz wyodrębnić część podstawową i część zaburzającą:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n = Y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n$$

które można z dobrą dokładnością przybliżyć do wyrażenia zawierającego pierwszą pochodną zaburzeniową:

$$(4) \quad Y(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n Y(s)}{ds^n} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \cong Y(s) + \frac{dY(s)}{ds} \frac{d}{d\tau}$$

Rozwinięcie (4) można zastosować do operatorów  $G$ ,  $B$ , wówczas zaburzenia będą wynosić odpowiednio:

$$G(s) \xrightarrow{MOD} G(s + \sigma) \cong G(s) + \frac{dG(s)}{ds} \sigma$$

dla operatora hermitowskiego,

$$B(s) \xrightarrow{MOD} B(s + \sigma) \cong B(s) + \frac{dB(s)}{ds} \sigma$$

dla operatora antyhermitowskiego.

### Modyfikacje układów elementarnych

W [1] przedstawiono rachunek operatorów, tj. odpowiedniość (izomorfizm) pomiędzy układem elementarnym (ułamkiem prostym), a jego oryginałem czasowym, tzn. funkcją zadaną w przedziale  $t/T \in [0, 1)$ :

$$\frac{1}{\alpha + s} \rightarrow \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} = \frac{e^{-\alpha T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)}, \operatorname{Re}\{\alpha\} > 0,$$

która posiada sprzężenie operatorowe ( $s \rightarrow -s$ ,  $t \rightarrow T - t$ ,  $t/T \rightarrow 1 - t/T$ ):

$$\frac{1}{\alpha - s} \rightarrow \frac{e^{-\alpha(T-t)}}{1 - e^{-\alpha T}} = \frac{e^{\alpha T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)}, \operatorname{Re}\{\alpha\} > 0.$$

Z punktu widzenia zaburzenia modulacyjnego potrzebne są pochodne powyższych izomorfizmów. Aby wyznaczyć matematycznie zaburzenie modulacyjne operatora elementarnego należy wykorzystać własność symetrii pochodnej, pozwalającej na zamianę zmiennej różniczkowania:

$$(5) \quad \frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha + s} = \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha + s}.$$

Następnie operacji „s-pochodnej” przyporządkowuje się funkcję czasowo-zależną:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha + s} &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} \right) = \\ &= -T \frac{e^{-\alpha T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{t}{T}\right) e^{\frac{\alpha T}{2}} + \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)} =, \\ &= -TC\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) A\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

gdzie:

$$A\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \equiv \frac{e^{-\alpha T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)},$$

$$C\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) = \frac{\left(\frac{t}{T}\right) e^{\frac{\alpha T}{2}} + \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-\frac{\alpha T}{2}}}{2sh\left(\alpha \frac{T}{2}\right)}.$$

Analogicznie jak w (5) wykorzystuje się własność symetrii dla sprzężonego operatorowo układu elementarnego:

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha - s} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha - s},$$

na podstawie której wyznacza się przyporządkowanie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha - s} &\rightarrow -\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{e^{-\alpha(T-t)}}{1 - e^{-\alpha T}} \right) = \\ &= TC\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) A\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right). \end{aligned}$$

Tak więc otrzymano następujące izomorfizmy operatorowo-czasowe:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha + s} \rightarrow A\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \\ \frac{1}{\alpha - s} \rightarrow A\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) \end{cases},$$

oraz:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha + s} \rightarrow -TC\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) A\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \\ \frac{d}{ds} \frac{1}{\alpha - s} \rightarrow TC\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) A\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) \end{cases}.$$

Dla krótkości wprowadza się następujące oznaczenia:

$$\begin{cases} A\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{A}; C\left(\alpha T, \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{C} \\ A\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{A}_+; C\left(\alpha T, 1 - \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{C}_+ \end{cases},$$

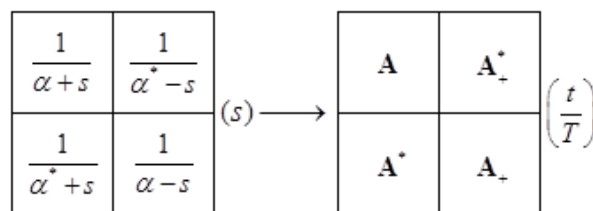
zachodzi również:

$$\begin{cases} A\left(\alpha^* T, \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{A}^*; C\left(\alpha^* T, \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{C}^* \\ A\left(\alpha^* T, 1 - \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{A}_+^*; C\left(\alpha^* T, 1 - \frac{t}{T}\right) \equiv \mathbf{C}_+^* \end{cases},$$

gdzie:

\* – sprzężenie zespolone, + – sprzężenie operatorowe.

Dzięki temu można zapisać funkcje elementarne, wraz z odpowiadającymi im oryginałami czasowymi (rys.3) oraz „s-pochodnym” przyporządkować odpowiadające im funkcje czasowe (rys.4).



Rys.3. Przyporządkowanie układom elementarnym odpowiedników czasowo-zależnych.

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+s} & \frac{1}{\alpha^*-s} \\ \frac{1}{\alpha^*+s} & \frac{1}{\alpha-s} \end{pmatrix} (s) \longrightarrow (-T) \begin{pmatrix} \mathbf{CA} & -(\mathbf{CA})_+^* \\ (\mathbf{CA})_+^* & -(\mathbf{CA})_- \end{pmatrix} \left(\frac{t}{T}\right)$$

Rys.4. Przyporządkowanie „s-pochodnym” odpowiedników czasowo-zależnych.

**Modulacja czwórki elementarnej dla rozkładów G, B**

W [1] przedstawiono celowość wprowadzenia operatora czwórki elementarnej hermitowskiej i antyhermitowskiej do optymalizacyjnego ujęcia teorii mocy.

Stosując przyjęte uproszczone oznaczenia wprowadzono czwórkę hermitowską (symetryczną) wraz z jej odpowiadającymi czasowo-zależnymi funkcjami (rys. 5).

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\alpha+s} & \frac{a^*}{\alpha^*-s} \\ \frac{a^*}{\alpha^*+s} & \frac{a}{\alpha-s} \end{pmatrix} \oplus (s) \longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a\mathbf{A} & (a\mathbf{A})_+^* \\ (a\mathbf{A})_+^* & a\mathbf{A}_+ \end{pmatrix} \left(\frac{t}{T}\right)$$

Rys.5. Czwórka symetryczna (hermitowska) oraz jej oryginał czasowy.

Na rysunku występuje symbol  $\oplus$ , który należy interpretować jako sumę wszystkich składników wewnętrznych czwórki. Kombinacja symetrycznych „s-czwórek” tworzy operator  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{a(\alpha)}{\alpha+s} + \frac{[a(\alpha)]^*}{\alpha^*+s} \\ \frac{a(\alpha)}{\alpha-s} + \frac{[a(\alpha)]^*}{\alpha^*-s} \end{pmatrix}$$

który jest samosprzężony (parzysty), tj.  $G(s)=G(-s)$ . Natomiast rozwijając czasową odpowiedniość pojedynczej składowej czwórki z rysunku 5 otrzymuje się wyrażenie:

$$\frac{1}{2} [a\mathbf{A} + (a\mathbf{A})^* + a\mathbf{A}_+ + (a\mathbf{A}_+)^*] = \text{Re}\{a\mathbf{A} + a\mathbf{A}_+\} = \text{Re}\{a(\mathbf{A} + \mathbf{A}_+)\}$$

dla którego zachodzi:

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}_+ = \frac{ch\left[\alpha T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}$$

Czwórkę antyhermitowską (antysymetryczną) przedstawiono na rysunku 6.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\alpha+s} & \frac{-a^*}{\alpha^*-s} \\ \frac{a^*}{\alpha^*+s} & \frac{-a}{\alpha-s} \end{pmatrix} \oplus (s) \longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a\mathbf{A} & -(a\mathbf{A})_+^* \\ (a\mathbf{A})_+^* & -a\mathbf{A}_+ \end{pmatrix} \left(\frac{t}{T}\right)$$

Rys.6. Czwórka antisymetryczna (antyhermitowska) oraz jej oryginał czasowy.

Kombinacja antisymetrycznych „s-czwórek” tworzy operator  $B(s)$ :

$$B(s) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{a(\alpha)}{\alpha+s} - \frac{[a(\alpha)]^*}{\alpha^*+s} \\ -\frac{a(\alpha)}{\alpha-s} - \frac{[a(\alpha)]^*}{\alpha^*-s} \end{pmatrix}$$

który jest antisamosprzężony (nieparzysty), tj.  $B(-s)=-B(s)$ . Rozwijając, analogicznie jak w przypadku hermitowskim, oryginał czasowy z rysunku 6 otrzymuje się:

$$\frac{1}{2} [a\mathbf{A} + (a\mathbf{A})^* - a\mathbf{A}_+ - (a\mathbf{A}_+)^*] = \text{Re}\{a(\mathbf{A} - \mathbf{A}_+)\}$$

przy czym:

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}_+ = \frac{-sh\left[\alpha T\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]}{sh\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}$$

Przyporządkowanie czasowe „s-pochodnej” czwórki hermitowskiej przedstawione zostało na rysunku 7.

$$\frac{dG(s)}{ds} \longrightarrow \left(-\frac{T}{2}\right) \begin{pmatrix} a\mathbf{CA} & -[a(\mathbf{CA})_+^*] \\ (a\mathbf{CA})_+^* & -a(\mathbf{CA})_- \end{pmatrix} \oplus \left(\frac{t}{T}\right)$$

Rys.7. Oryginał czasowy „s-pochodnej” czwórki hermitowskiej.

Przekształcając wyrażenie czasowo-zależne otrzymuje się:

$$\left(-\frac{T}{2}\right) \left\langle a\mathbf{CA} + (a\mathbf{CA})^* - \left[ a(\mathbf{CA})_+ + [a(\mathbf{CA})_+]^* \right] \right\rangle = (-T) \text{Re}\{a\mathbf{CA} - a(\mathbf{CA})_+\} = (-T) \text{Re}\{a[\mathbf{CA} - (\mathbf{CA})_+]\}$$

Natomiast przyporządkowanie czasowe „s-pochodnej” czwórki antyhermitowskiej przedstawia rysunek 8.

$$\frac{dB(s)}{ds} \longrightarrow \left(-\frac{T}{2}\right) \begin{pmatrix} a\mathbf{CA} & [a(\mathbf{CA})_+^*] \\ (a\mathbf{CA})_+^* & a(\mathbf{CA})_- \end{pmatrix} \oplus \left(\frac{t}{T}\right)$$

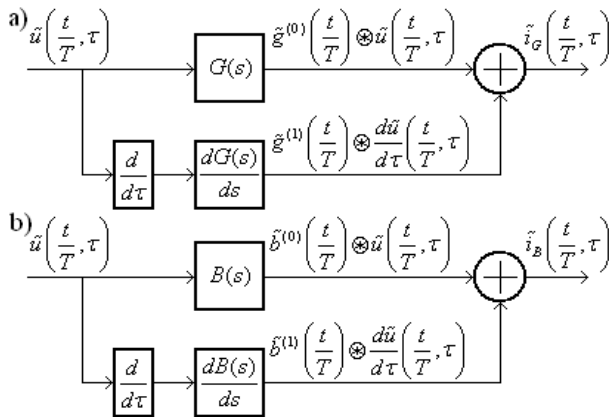
Rys.8. Oryginał czasowy „s-pochodnej” czwórki antyhermitowskiej.

Z czasowego wyrażenia otrzymuje się:

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{T}{2} \left\{ a\mathbf{CA} + (a\mathbf{CA})^* + \right. \\ & \left. + a(\mathbf{CA})_+ + [a(\mathbf{CA})_+]^* \right\} = \\ & = (-T) \operatorname{Re} \left\{ a \left[ \mathbf{CA} + (\mathbf{CA})_+ \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

### Działanie algorytmu modulacyjnego

Poniżej przedstawiono schemat blokowy realizacji operatorów z uwzględnieniem poprawki modulacyjnej.



Rys.9. Schemat blokowy realizacji układu: a) hermitowskiego, b) antyhermitowskiego; zawierającego zaburzenie modulacyjne.

Na schemacie (rys.4) występują filtry główne i korekcyjne o cyklicznych funkcjach impulsowych, będących kombinacjami następujących funkcji:

$$\tilde{g}^{(0)}\left(\frac{t}{T}\right) = \operatorname{Re} \left\{ a(\mathbf{A} + \mathbf{A}_+) \right\},$$

$$\tilde{b}^{(0)}\left(\frac{t}{T}\right) = \operatorname{Re} \left\{ a(\mathbf{A} - \mathbf{A}_+) \right\},$$

$$\tilde{g}^{(1)}\left(\frac{t}{T}\right) = (-T) \operatorname{Re} \left\{ a \left[ \mathbf{CA} - (\mathbf{CA})_+ \right] \right\},$$

$$\tilde{b}^{(1)}\left(\frac{t}{T}\right) = (-T) \operatorname{Re} \left\{ a \left[ \mathbf{CA} + (\mathbf{CA})_+ \right] \right\}.$$

Składowe prądów  $i_G$  oraz  $i_B$  są sumą spłotów cyklicznych odpowiednich funkcji impulsowych z sygnałem zmodulowanego napięcia T-okresowego:

$$\tilde{i}_G\left(\frac{t}{T}, \tau\right) = \tilde{g}^{(0)}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \tilde{u}\left(\frac{t}{T}, \tau\right) + \tilde{g}^{(1)}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \frac{d\tilde{u}}{d\tau}\left(\frac{t}{T}, \tau\right),$$

$$\tilde{i}_B\left(\frac{t}{T}, \tau\right) = \tilde{b}^{(0)}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \tilde{u}\left(\frac{t}{T}, \tau\right) + \tilde{b}^{(1)}\left(\frac{t}{T}\right) \otimes \frac{d\tilde{u}}{d\tau}\left(\frac{t}{T}, \tau\right),$$

gdzie:

$$\left( \tilde{h} \otimes \tilde{x} \right) \left( \frac{t}{T} \right) = \int_0^1 \tilde{h} \left( \frac{t \ominus \tau}{T} \right) \tilde{x} \left( \frac{\tau}{T} \right) d \left( \frac{\tau}{T} \right)$$

$$\frac{t \ominus \tau}{T} = \begin{cases} \frac{t - \tau}{T}; & \text{dla } \frac{t - \tau}{T} \in [0, 1) \\ \frac{t - \tau}{T} + 1; & \text{dla } \frac{t - \tau}{T} \notin [0, 1) \end{cases}$$

### Wnioski

W artykule opisano syntezę specjalnych filtrów do wydzielenia z prądu dwójnika elektrycznego składowej czynnej i składowej nieczynnej w sytuacji kiedy napięcie dwójnika jest sygnałem okresowym zmodulowanym. Efektem modulacji sygnału wejściowego jest pojawienie się równoległych filtrów korekcyjnych: nieparzystego (antyhermitowskiego) filtru  $dG/ds$  w parzystej gałęzi

$G(s)$  i parzystego  $dB/ds$  w nieparzystej gałęzi  $B(s)$ .

Filtry działają bezpośrednio w dziedzinie czasu z użyciem spłotów cyklicznych co będzie umożliwiało zastosowanie cyfrowego przekształcania sygnałów. Przybliżenie (2) jest miarodajne w przypadku gdy  $|\sigma| \ll |s|$ . Rozwinięcie wyższego rzędu będzie uwzględnione w kolejnych publikacjach.

### LITERATURA

- [1] Hawron K.: Rachunek operatorowy dla sygnałów impulsowych i okresowych w dziedzinie czasu, *Przeгляд Elektrotechniczny*, 90 (2014), nr 9, 225–228
- [2] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – podstawy matematyczne, metoda operatorowa, *Przeгляд Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr 4, 134–141
- [3] Pasko M., Walczak J.: Optymalizacja energetyczno-jakościowych właściwości obwodów elektrycznych z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi, ZN Pol. Śl. Elektryka, 150, Gliwice 1996
- [4] Porada R.: Właściwości energetyczne procesów w układach elektrycznych, Wydawn. Pol. Poznańskiej, Rozprawy nr 369, Poznań 2002

**Autorzy:** prof. zw. dr hab. inż. Maciej Siwczyński, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: [msiwczynski@pk.edu.pl](mailto:msiwczynski@pk.edu.pl);  
mgr inż. Konrad Hawron, Politechnika Krakowska, Instytut Elektrotechniki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, E-mail: [konhawpk@gmail.com](mailto:konhawpk@gmail.com).