**Stanisław KONATOWSKI, Piotr KANIEWSKI**

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki

# Algorytmy wygładzania stosowane w zintegrowanym systemie nawigacyjnym radaru SAR

***Streszczenie.*** *Zintegrowane systemy nawigacyjne INS/GNSS (Inertial Navigation System / Global Navigation Satellite System) odgrywają istotną rolę w procesie korekcji nawigacyjnej radaru SAR (Synthetic Aperture Radar). Niezależny system korekcji nawigacyjnej radaru SAR powinien zapewniać przetwarzanie danych nawigacyjnych stosując różne algorytmy filtracji lub wygładzania. W artykule opisano algorytmy wygładzające: w stałym punkcie, w stałym przedziale oraz ze stałym opóźnieniem.*

***Abstract***. *Inertial Navigation System and Global Navigation Satellite System (INS/GNSS) have an important role during the process of motion compensation in Synthetic Aperture Radar (SAR). Independent system of motion compensation of SAR radar should provide processing of navigational data with use of different filtration or smoothing algorithms. In this paper following smoothing algorithms are described: fixed-point, fixed-interval and fixed-lag.* ***(Smoothing algorithms used in integrated navigation system of SAR radar)****.*

**Słowa kluczowe**: filtracja, filtr Kalmana, wygładzanie (w stałym punkcie, w stałym przedziale, ze stałym opóźnieniem).
**Keywords**: filtration, Kalman Filter, Fixed-point smoothing, Fixed-interval smoothing, Fixed-lag smoothing.

doi:10.12915/pe.2014.08.42

## Wstęp

Systemy nawigacyjne INS/GNSS (*Inertial Navigation System / Global Navigation Satellite System*) odgrywają istotną rolę w procesie korekcji nawigacyjnej radaru SAR (*Synthetic Aperture Radar*) i mogą być luźno lub ściśle zintegrowanymi systemami nawigacyjnymi [2-4].

Niezależny system korekcji nawigacyjnej radaru SAR powinien zapewniać przetwarzanie danych nawigacyjnych stosując różne algorytmy filtracji lub wygładzania. Takie rozwiązanie umożliwia wykorzystanie systemu nie tylko jako źródła danych korekcyjnych radaru SAR, ale również jako samodzielnego pokładowego systemu nawigacyjnego, a nawet jako źródła danych pomiarowych dla układu stabilizacji systemu antenowego.

## Algorytm filtra Kalmana

W teorii estymacji [4,8] ocena stanu a priori $\hat{\mathbf{x}}^-$ w chwili $k$, jest oszacowaniem stanu w chwili $k$, na podstawie wszystkich pomiarów do chwili $k$ (z wyłączeniem pomiaru w chwili $k$). Ocena stanu a posteriori $\hat{\mathbf{x}}^+$ w chwili $k$, jest oszacowaniem stanu w chwili $k$ na podstawie wszystkich pomiarów włącznie z chwilą $k$. Oceny te są zdefiniowane i oznaczane odpowiednio:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k,k-1} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{k-1}\right), \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k,k} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_k \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k\right). \tag{2}$$

Jeśli dysponuje się większą liczbą pomiarów (np. aż do czasu $N$) należy oczekiwać lepszego oszacowania wektora stanu. Istnieje wiele sposobów na otrzymanie takich oszacowań, np. filtracja czy też wygładzanie w stałym punkcie lub w stałym przedziale czasowym lub ze stałym opóźnieniem, albo ich modyfikacje. Sposoby optymalnego wygładzania oparte są na algorytmie filtra Kalmana [1-2,5]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1}, \tag{3}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_k^+\mathbf{F}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k, \tag{5}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_k^-\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-\right), \tag{9}$$

gdzie: $\mathbf{x}_k$ – $n$-elementowy wektor stanu w chwili $k$, $\mathbf{F}_k$ – $n \times n$ wymiarowa macierz stanu, $\mathbf{w}_k$ – $p$-elementowy wektor zakłóceń stanu o macierzy kowariancji zakłóceń $\mathbf{Q}_k$, $\mathbf{z}_k$ – $m$-elementowy wektor pomiarowy, $\mathbf{H}_k$ – $m \times n$ wymiarowa macierz pomiarowa (obserwacji), $\mathbf{v}_k$ – $m$-elementowy wektor błędów pomiarowych o macierzy kowariancji zakłóceń $\mathbf{R}_k$, $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ – estymata wektora stanu w chwili $k$ (wynik filtracji), $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ – estymata wektora stanu w chwili $k$ (wynik predykcji), $\mathbf{K}_k$ – $n \times m$ wymiarowa macierz wzmocnień Kalmana, $\mathbf{P}_k^-$ – macierz kowariancji błędów filtracji w chwili $k$, $\mathbf{P}_k^+$ – macierz kowariancji błędów predykcji w chwili $k$, $\mathbf{I}$ – $n \times n$ wymiarowa macierz jednostkowa.

Stosuje się także alternatywną formę filtra Kalmana [1]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- = \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k\left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-\right), \tag{10}$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_k^-\left(\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k\mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k, \tag{11}$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}, \tag{12}$$

gdzie $\mathbf{L}_k$ jest wzmocnieniem tego filtra. Ta forma filtra określa tylko stany estymat a priori oraz kowariancje. Obie postaci wzmocnienia Kalmana $\mathbf{K}_k$ i $\mathbf{L}_k$ zapewniają identyczne estymaty stanu i kowariancji błędów estymacji.

## Wygładzanie w stałym punkcie

Celem wygładzania w stałym punkcie jest uzyskanie estymat a priori wektora stanu $\mathbf{x}(j)$ w chwilach $j + 1$, $j + 2$, ..., $k$, $k + 1$, ... . Często używa się zapisu $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$ do oznaczania estymaty $\mathbf{x}(j)$ uzyskanej z wykorzystaniem wszystkich pomiarów do chwili ($k$ - 1) włącznie z tą chwilą. Zatem estymata $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$ może być traktowana jako estymata a priori wektora $\mathbf{x}(j)$ w chwili $k$

$$\hat{\mathbf{x}}_{j,k} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_j \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{k-1}\right) \quad \text{dla} \quad k \geq j. \tag{13}$$

Z podanej definicji widać, że

(14) $$\hat{\mathbf{x}}_{j,j} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_j \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{j-1}\right) = \hat{\mathbf{x}}_j^- .$$

Innymi słowy, estymata $\hat{\mathbf{x}}_{j,j}$ w chwili $j$ jest estymatą stanu a priori, a estymata $\hat{\mathbf{x}}_{j,j+1}$ jest estymatą stanu a posteriori

(15) $$\hat{\mathbf{x}}_{j,j+1} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_j \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_j\right) = \hat{\mathbf{x}}_j^+ .$$

Zadanie realizowane przez wygładzanie w stałym punkcie, w przypadku posiadania dodatkowych pomiarów w chwilach $j, j+1, j+2$ ... polega na włączeniu i wykorzystaniu tych informacji do uzyskania polepszonej estymaty (razem z jej kowariancją) dla stanu w chwili $j$.
Algorytm wygładzania w stałym punkcie jest realizowany w sposób następujący:
Trzeba uruchomić standardowy filtr Kalmana aż do chwili $j$, w której wylicza się $\hat{\mathbf{x}}_j^-$ oraz $\mathbf{P}_j^-$. Dla uproszczenia zapisu w algorytmie dla $\mathbf{P}_j^-$ pomija się minus w indeksie górnym.
Należy zainicjować filtr przy założeniach:

(16) $$\hat{\mathbf{x}}_{j,j} = \hat{\mathbf{x}}_j^-, \quad \mathbf{\Sigma}_j = \mathbf{P}_j, \quad \mathbf{\Pi}_j = \mathbf{P}_j .$$

Dla $k = j, j+1$, ...., należy wykonać następujące obliczenia:

(17) $$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1},$$

(18) $$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1},$$

(19) $$\hat{\mathbf{x}}_{j,k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{j,k}^- + \boldsymbol{\lambda}_k \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\right),$$

(20) $$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{L}_k \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\right),$$

(21) $$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k^- \left(\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_k ,$$

(22) $$\mathbf{\Pi}_{k+1}^- = \mathbf{\Pi}_k^- - \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}} ,$$

(23) $$\mathbf{\Sigma}_{k+1} = \mathbf{\Sigma}_k \left(\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} .$$

Macierz kowariancji $\mathbf{P}_k$ jest macierzą kowariancji a priori estymaty wektora $\mathbf{x}(k)$ standardowego filtra Kalamana, macierz $\mathbf{\Pi}_k$ jest macierzą kowariancji wygładzonej estymaty wektora $\mathbf{x}(j)$ w chwili $k$, a macierz $\mathbf{\Sigma}_k$ jest macierzą kowariancji sprzężonej tych dwóch kowariancji.

**Wygładzanie ze stałym opóźnieniem**

W wygładzaniu ze stałym opóźnieniem otrzymuje się estymatę stanu w chwili $k - N$ używając pomiarów do chwili $k$ włącznie, gdzie indeks czasu $k$ nieustannie się zmienia w miarę pozyskiwania nowych pomiarów, a opóźnienie $N$ jest stałe. Oznacza to, że w każdej chwili czasu jest dostępnych $N$ przyszłych pomiarów do estymacji stanu. Zatem można uzyskać $\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}$ dla $k = N, N+1$, ..., gdzie $N$ jest ustaloną liczbą naturalną. W algorytmie tym używane są następujące oznaczenia:

(24) $$\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_{k-N} \middle| \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_k\right),$$

(25) $$\mathbf{\Pi}_{k-N} = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{x}_{k-N} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}\right)\left(\mathbf{x}_{k-N} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}\right)^{\mathrm{T}}\right].$$

W wygładzaniu w stałym punkcie, estymata $\hat{\mathbf{x}}_{k,m}$ oznaczała oszacowanie wektora $\mathbf{x}(k)$ uzyskane z pomiarów do chwili $m - 1$ włącznie. W wygładzaniu ze stałym opóźnieniem jest ona wyznaczana z pomiarów do chwili $m$ włącznie.

Jeśli zdefiniuje się estymatę $\hat{\mathbf{x}}_{k,m}$ jako stan $\mathbf{x}_{k-m}$ rozpropagowany z jednostkową macierzą przejścia oraz z zerowym szumem przetwarzania do chwili $k$ to:

(26) $$\mathbf{x}_{k+1,1} = \mathbf{x}_k , \quad \mathbf{x}_{k+1,2} = \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_{k,1} , \quad \mathbf{x}_{k+1,3} = \mathbf{x}_{k-2} = \mathbf{x}_{k,2} .$$

Jeśli używa się filtra Kalmana do estymacji stanów systemu (na podstawie pomiarów do chwili $k$ włącznie), to estymata ostatniego elementu wektora stanu $\mathbf{x}_{k+1,N+1}$ będzie równa estymacie wektora $\mathbf{x}_{k-N}$ uzyskanej z pomiarów do chwili $k$ włącznie. Jest to estymata, której poszukuje się dla wygładzania ze stałym opóźnieniem. Zmienna stanu jest inicjowana jako $\mathbf{x}_{k,m} = \mathbf{x}_{k-m}$ i posiada jednostkową macierz stanów przejść. Estymata a posteriori zmiennej $\mathbf{x}_{k+m,m}$ jest wtedy równa $\hat{\mathbf{x}}_{k-m,k}$.

W algorytmie wygładzania ze stałym opóźnieniem należy uruchomić standardowy algorytm filtra Kalmana aż do chwili $j$, w której wylicza się $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$, $\mathbf{L}_k$ oraz $\mathbf{P}_k^-$.
Należy zainicjować filtr wg zależności:

(27) $$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- , \quad \mathbf{L}_{k,0} = \mathbf{L}_k , \quad \mathbf{P}_k^{0,0} = \mathbf{P}_k^-$$

i dla $i = 1, ..., N + 1$ wykonać następujące operacje:

(28) $$\mathbf{L}_{k,i} = \mathbf{P}_k^{0,i-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{0,0} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1},$$

(29) $$\mathbf{P}_{k+1}^{i,i} = \mathbf{P}_k^{i-1,i-1} - \mathbf{P}_k^{0,i-1} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{L}_{k,i}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}_k^{\mathrm{T}} ,$$

(30) $$\mathbf{P}_{k+1}^{0,i} = \mathbf{P}_k^{0,i-1} \left(\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_{k,0} \mathbf{H}_k\right)^{\mathrm{T}} ,$$

(31) $$\hat{\mathbf{x}}_{k+1-i,k} = \hat{\mathbf{x}}_{k+2-i,k} + \mathbf{L}_{k,i} \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-\right).$$

Można zauważyć, że w pierwszej iteracji tej pętli wykonywane jest odświeżanie pomiarów standardowego filtra Kalmana. Po zakończeniu pętli posiadamy wygładzone estymaty każdego stanu z opóźnieniami w zakresie od 0 do $N$, uzyskane z wykorzystaniem pomiarów do chwili $k$ włącznie. Te estymaty są opisane jako $\hat{\mathbf{x}}_{k,k}, ..., \hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}$. Ponadto mamy kowariancje błędów estymacji oznaczane jako $\mathbf{P}_{k+1}^{1,1}, ..., \mathbf{P}_{k+1}^{N+1,N+1}$.

**Wygładzanie ze stałymi odstępami**

Przy założeniu, że pomiary są wykonywane z równymi odstępami czasu, w wygładzaniu ze stałymi odstępami czasu, poszukuje się estymat stanów w punktach pomiędzy pomiarami. Podczas procesu wygładzania nie pozyskuje się żadnych nowych pomiarów. Wyróżnić można dwa rodzaje tego typu wygładzania: „do przodu" i „do tyłu".

**Wygładzanie „do przodu – do tyłu"**

Jeśli założymy, że estymując stan $\mathbf{x}_m$ opieramy się na pomiarach od $k = 1$ do $k = N$ (dla $N > m$), wygładzanie „do przodu – do tyłu" bazuje na dwóch rodzajach estymaty $\mathbf{x}_m$. Pierwsza estymata $\hat{\mathbf{x}}_f$ opiera się na filtrze Kalmana, który działa od $k = 1$ do $k = m$. Druga estymata $\hat{\mathbf{x}}_b$ bazuje na filtrze Kalmana, który działa odwrotnie w czasie od $k = N$ do $k = m$. Takie podejście do wygładzania łączy dwie estymaty aby otrzymać optymalnie wygładzoną estymatę.
Na początku zakłada się, że połączono estymatę stanu „do przodu" $\hat{\mathbf{x}}_f$ oraz estymatę „wsteczną" $\hat{\mathbf{x}}_b$ aby uzyskać wygładzoną estymatę

(32) $$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{x}}_b ,$$

gdzie $\mathbf{K}_f$ i $\mathbf{K}_b$ są stałymi macierzami współczynników. Zakłada się także, że estymaty $\hat{\mathbf{x}}_f$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_b$ są niezależne, ponieważ obie są wynikami działania filtrów Kalmana. Zatem aby estymata $\hat{\mathbf{x}}$ była niezależna $\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_b = 1$. Wówczas

(33) $$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_f\right)\hat{\mathbf{x}}_b .$$

Dla zerowej wartości średniej $\mathrm{E}\left(\mathbf{e}_f \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}}\right)$, gdzie $\mathbf{e}_f = \mathbf{x} - \mathbf{x}_f$ oraz $\mathbf{e}_b = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b$ , macierz kowariancji estymaty może być zatem wyznaczona jako (34)

$$\mathbf{P} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{K}_f \left(\mathbf{e}_f \mathbf{e}_f^{\mathrm{T}} + \mathbf{e}_b \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{K}_f^{\mathrm{T}} + \mathbf{e}_b \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}} - \mathbf{K}_f \mathbf{e}_b \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}} - \mathbf{e}_b \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_f^{\mathrm{T}}\right\}.$$

Estymaty $\hat{\mathbf{x}}_f$ oraz $\hat{\mathbf{x}}_b$ są bezstronne, a $\mathbf{e}_f$ i $\mathbf{e}_b$ niezależne (zależą od rozdzielnych zbiorów pomiarów). Wtedy macierz $\mathbf{P}_f = \mathrm{E}\left(\mathbf{e}_f \mathbf{e}_f^{\mathrm{T}}\right)$ jest kowariancją estymaty „do przodu", a macierz $\mathbf{P}_b = \mathrm{E}\left(\mathbf{e}_b \mathbf{e}_b^{\mathrm{T}}\right)$ kowariancją estymaty wstecznej. Wyzerowanie ich umożliwia znalezienie optymalnych wartości wzmocnień

(35) $$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_b \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1}, \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{P}_f \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1}.$$

Kowariancja wygładzania ze stałym odstępem zdefiniowana zależnością

(36) $$\begin{aligned} \mathbf{P} = {} & \mathbf{P}_b \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1} \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)\left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1} \mathbf{P}_b + \\ & + \mathbf{P}_b - \mathbf{P}_b \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1} \mathbf{P}_b - \mathbf{P}_b \left(\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_b\right)^{-1} \mathbf{P}_b \end{aligned},$$

po wykorzystaniu stosownych tożsamości i twierdzenia o odwrotności macierzy, sprowadza się do postaci

(37) $$\mathbf{P} = \left(\mathbf{P}_f^{-1} + \mathbf{P}_b^{-1}\right)^{-1}.$$

Równania (32-37) tworzą podstawy algorytmu wygładzania ze stałym odstępem.

Aby otrzymać wygładzoną estymatę w chwili $m$ należy uruchomić algorytm filtra Kalmana „do przodu" i użyć pomiarów do chwili $m$ włącznie. W tym celu należy zainicjować filtr „do przodu" wykorzystując zależności:

(38) $$\hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+} = \mathrm{E}\left(\mathbf{x}_0\right), \quad \mathbf{P}_{f0}^{+} = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+}\right)\left(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{f0}^{+}\right)^{\mathrm{T}}\right],$$

a następnie dla $k$ = 1, ..., $m$ wykonać obliczenia:

(39) $$\mathbf{P}_{fk}^{-} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{f,k-1}^{+} \mathbf{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_{k-1} ,$$

(40) $$\mathbf{K}_{fk} = \mathbf{P}_{fk}^{+} \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_k^{-1} ,$$

(41) $$\hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{f,k-1}^{+} ,$$

(42) $$\hat{\mathbf{x}}_{fk}^{+} = \hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-} + \mathbf{K}_{fk} \left(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{fk}^{-}\right),$$

(43) $$\mathbf{P}_{fk}^{+} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk} \mathbf{H}_k\right)\mathbf{P}_{fk}^{-} .$$

W ten sposób dla wektora $\mathbf{x}(m)$ i pomiarów do chwili $m$ włącznie, otrzymuje się estymatę „do przodu" wraz z jej kowariancją.

Filtr „wsteczny" działa w czasie „do tyłu", zaczynając w chwili o najwyższym indeksie czasu. Ponieważ estymaty „do przodu" i „do tyłu' muszą być niezależne, żadna informacja wykorzystana w jednym filtrze nie może trafić do filtra drugiego. Zatem macierz $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ powinna spełniać warunek

(44) $$\mathbf{P}_{bN}^{-} = \infty .$$

W indeksie górnym macierzy używa się znaku minus aby wskazać, że kowariancja do „tyłu" w chwili $N$ jest przetwarzana przed pomiarem w chwili $N$ (filtrowanie „wsteczne"). Zatem $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ będzie uaktualniane tak aby uzyskać $\mathbf{P}_{bN}^{+}$ po tym jak zostanie przetworzony pomiar z chwili $N$. Następnie będzie ekstrapolowany wstecznie w czasie aby uzyskać $\mathbf{P}_{b,N-1}^{-}$, itd. Z kolei problem inicjacji „wstecznej" dla estymaty stanu $\hat{\mathbf{x}}_{bk}^{-}$ momentu $k = N$ można rozwiązać przez wprowadzeniu nowej zmiennej

(45) $$\mathbf{s}_k = \mathbf{P}_{bN}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{bk} .$$

Znak minus lub plus w indeksie górnym może być dodany do wszystkich wielkości w zależności (50) w celu oznaczenia wartości przed lub po pomiarze w chwili $k$. Ponieważ wartość $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ jest nieskończona wobec czego

(46) $$\mathbf{s}_N^{-} = 0 .$$

Warunek brzegowy w nieskończoności dla $\mathbf{P}_{bN}^{-}$ oznacza, że nie można użyć standardowego filtra Kalmana „wstecznie", ponieważ algorytm należy zaczynać z nieskończoną kowariancją. Zamiast tego należy wykorzystać filtr informacyjny bazujący na zależnościach:

(47) $$\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{F}_{k-1}^{-1} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{b,k-1} , \quad \mathbf{w}_{bk} \approx \left(0, \mathbf{F}_{k-1}^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{F}_{k-1}^{-\mathrm{T}}\right),$$

(48) $$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k , \quad \mathbf{v}_k \approx \left(0, \mathbf{R}_k\right).$$

W algorytmie wstecznego filtra informacyjnego należy zainicjować go z warunkami początkowymi:

(49) $$\mathbf{s}_N^{-} = 0 , \quad \mathbf{I}_{bN}^{-} = 0$$

i dla $k = N$, $N$ - 1, ..., $m$ + 1 wykonać następujące czynności:

(50) $$\mathbf{I}_k^{+} = \mathbf{I}_k^{-} + \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k ,$$

(51) $$\mathbf{s}_k^{+} = \mathbf{s}_k^{-} + \mathbf{H}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k ,$$

(52) $$\mathbf{I}_{b,k-1}^{-} = \mathbf{F}_{k-1}^{\mathbf{T}} \left[\mathbf{Q}_{k-1}^{-1} - \mathbf{Q}_{k-1}^{-1} \left(\mathbf{I}_{bk}^{+} + \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^{-1}\right]\mathbf{F}_{k-1} ,$$

(53) $$\mathbf{s}_{k-1}^{-} = \mathbf{I}_{b,k-1}^{-} \mathbf{F}_{k-1}^{-1} \left(\mathbf{I}_{bk}^{+}\right)^{-1} \mathbf{s}_k^{+} .$$

Należy wykonać jedną ostateczną aktualizację aby uzyskać wsteczną estymatę stanu x($m$):

(54) $$\mathbf{I}_{bm}^{-} = \mathbf{Q}_m^{-1} - \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{F}_m^{-1} \left(\mathbf{I}_{b,m+1}^{+} + \mathbf{F}_m^{-\mathrm{T}} \mathbf{Q}_m^{-1} \mathbf{F}_m^{-1}\right)^{-1} \mathbf{F}_m^{-\mathrm{T}} \mathbf{Q}_m^{-1} ,$$

(55) $$\mathbf{P}_{bm}^{-} = \left(\mathbf{I}_{bm}^{-}\right)^{-1} ,$$

(56) $$\mathbf{s}_m^{-} = \mathbf{I}_{bm}^{-} \mathbf{F}_m^{-1} \left(\mathbf{I}_{b,m+1}^{+}\right)^{-1} \mathbf{s}_{m+1}^{+} ,$$

(57) $$\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-} = \left(\mathbf{I}_{bm}^{-}\right)^{-1} \mathbf{x}_m^{-} .$$

W ten sposób z pomiarów $m+1$, $m+2$, ..., $N$ wyznaczono „wsteczną" estymatę $\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-}$ i jej kowariancję $\mathbf{P}_{bm}^{-}$.

Następnie łączy się uzyskane wartości „wsteczne" z wartościami „do przodu" aby uzyskać ostateczną estymatę stanu i kowariancję:

(58) $$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_{bm}^{-}\left(\mathbf{P}_{fm}^{+} + \mathbf{P}_{bm}^{-}\right)^{-1},$$

(59) $$\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{K}_f\right)\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-},$$

(60) $$\mathbf{P}_m = \left[\left(\mathbf{P}_{fm}^{+}\right)^{-1} + \left(\mathbf{P}_{bm}^{-}\right)^{-1}\right]^{-1}.$$

Po stosownych przekształceniach można uzyskać także alternatywne wyrażenie na $\hat{\mathbf{x}}_m$

(61) $$\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{P}_m\left(\mathbf{I}_{fm}^{+}\hat{\mathbf{x}}_{fm}^{+} + \mathbf{I}_{bm}^{-}\hat{\mathbf{x}}_{bm}^{-}\right).$$

Filtr „do przodu" został uruchomiony do uzyskania estymat a posteriori i kowariancji do chwili $m$. Następnie filtr „wsteczny" został uruchomiony do uzyskania estymy a priori i kowariancji w czasie od końca do chwili $m$ (np. a priori w odwróconej perspektywie czasu). Następnie estymaty „w przód" i „w tył" oraz ich kowariancje w chwili $m$ zostały połączone aby uzyskać docelową estymatę $\hat{\mathbf{x}}_m$ oraz kowariancję $\mathbf{P}_m$.

**Efektywność analizowanych algorytmów wygładzania**

Stopień poprawy algorytmu wygładzania w stałym punkcie [8] jest zdefiniowany przez współczynnik $\eta_{\mathrm{sp}}$

(62) $$\eta_{\mathrm{sp}} = \frac{tr\left(\mathbf{P}_j - \mathbf{\Pi}_{k+1}\right)}{tr\left(\mathbf{P}_j\right)} \cdot 100\%,$$

gdzie $j$ jest punktem wygładzania, a $k$ jest liczbą pomiarów.

Procentowa poprawa związana z wygładzaniem ze stałym opóźnieniem $\eta_{\mathrm{so}}$ wynosi

(63) $$\eta_{\mathrm{so}} = \frac{tr\left(\mathbf{P}_k^{0,0} - \mathbf{P}_k^{N+1,N+1}\right)}{tr\left(\mathbf{P}_k^{0,0}\right)} \cdot 100\%.$$

**Wnioski**

W pierwszym algorytmie estymata $\hat{\mathbf{x}}_{j,k}$ dla $k \geq j$ jest wynikiem wygładzania w stałym punkcie. W tym filtrze uzyskuje się ją w ustalonej chwili *j*, gdy pomiary są kontynuowane w czasie większym od *j* i do *k* w miarę pozyskiwania nowych pomiarów.

W drugim algorytmie estymata $\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k}$ dla stałego *N* jest wynikiem wygładzania ze stałym opóźnieniem. W tym filtrze znajduje się estymatę stanu w każdej chwili *k* używając pomiarów do chwili *k* + *N* włącznie. Indeks czasu *k* zmienia się, podczas gdy *N* pozostaje stałe.

W trzecim algorytmie estymata $\hat{\mathbf{x}}_{k,N}$ dla stałego *N* jest wynikiem działania filtra ze stałym przedziałem czasowym. W tym filtrze uzyskuje się estymatę stanu w każdej chwili *k* używając pomiarów do chwili *N* włącznie. Indeks czasu *k* zmienia się, podczas gdy ogólna liczba pomiarów *N* jest stała. Możliwe są także dwa rodzaje wygładzania: „do przodu" i „do tyłu".

LITERATURA


[1] Anderson B.D.O., Moore J.B., *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.

[2] Chen Z., *Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond*, 10.1.1.107.7415.pdf.

[3] Einicke G.A., *Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future*, Published by InTech, 2012.

[4] Gelb A., *Applied Optimal Estimation*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts and London, England, 2001.

[5] Kaniewski P., Konatowski S., *Metody integracji systemów INS/GNSS*, Elektronika - konstrukcje, technologie, zastosowania, Nr 12/2012, str. 103-106.

[6] Meditch J.S., *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*, WNT, 1975.

[7] Särkkä S., *Bayesian Estimation of Time-Varying Systems: Discrete-Time Systems*, 2011.

[8] Simon D., *Optimal State Estimation: Kalman, H-infinity and Nonlinear Approaches*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2006.



***Autorzy**: dr inż. Stanisław Konatowski, Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, ul. Gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa 49, E-mail: skonatowski@wat.edu.pl, płk dr hab. inż. Piotr Kaniewski, Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, ul. Gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa, E-mail: pkaniewski@wat.edu.pl.*