Andrzej ZAWADZKI

Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej

Analiza porównawcza metod wyznaczania transformacji linearyzujących nieliniowe równania stanu układu

Streszczenie. *W pracy przedstawiono zastosowanie elementów teorii geometrii różniczkowej do konstrukcji transformacji przestrzeni stanu, linearyzującej dynamiczny układ nieliniowy. Omówiono metody wyznaczania transformacji linearyzujących nieliniowe równania stanu układu (wejście-stan układu nieliniowego) oraz przeprowadzono ich analizę porównawczą. Przedstawiono warunki, jakie musi spełniać układ nieliniowy aby możliwe było przeprowadzenie zabiegów linearyzujących.*

Abstract. *The paper presents an application of elements of the theory of differential geometry for building the state space transformation, which linearizes a nonlinear dynamic system. The methods of determining the transformations for linearizing the nonlinear state equations (input-state of nonlinear system) are discussed and comparative analysis of them is performed. The conditions to be met by a nonlinear system to be able to carry out linearizing operations are also presented.(**Comparative analysis of methods for determining the transformation linearizing the nonlinear equations of the system state**).*

Słowa kluczowe: układ nieliniowy, transformacja przestrzeni stanu, nawiasy Liego, linearyzacja.
Keywords: nonlinear system, state space transformation, Lie brackets, linearization.

doi:10.12915/pe.2014.04.07

Wstęp

Obwody elektryczne o parametrach skupionych, układy mechaniczne czy elektromechaniczne mogą być opisane skończoną liczbą wzajemnie sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych i zależności algebraicznych [1–4]. Rzeczywiste układy fizyczne wykazują cechy nieliniowości oraz dodatkowo posiadają zmienne w czasie parametry. Badanie takich układów sprowadza się do analizy ich modelu matematycznego, który w ogólnym przypadku ma charakter nieliniowy. Stosując jednolite podejście matematyczne, opis stanu wielu rzeczywistych układów fizycznych można przedstawić za pomocą nieliniowego równania stanu [5–7].
Ogólnie nieliniowy model układu opisujący jego dynamikę w przestrzeni stanu można przedstawić za pomocą układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

(1) $$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\big), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n,\, u(t) \in \mathbf{R}^m$$

i układu równań algebraicznych:

(2) $$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}\big(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t\big), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$$

gdzie: t – czas, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ – pochodna wektora stanu $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ – wektor wymuszeń (wejść) układu, $\mathbf{y}(t)$ – wektor odpowiedzi (wyjść) układu, $\mathbf{f}$ i $\mathbf{h}$ –funkcje wektorowe (nieliniowe).

Projektowanie obwodów elektrycznych czy układów elektromagnetycznych zależy w dużym stopniu od postaci modelu matematycznego wykorzystywanego do analizy. Niestety w praktyce zarówno dobór adekwatnego modelu nieliniowego, jak i jego parametryzacja są bardzo trudne. Dlatego poszukuje się zlinearyzowanych – najlepiej liniowych modeli układów nieliniowych.
Współczesna teoria układów nieliniowych, w szczególności jej geometryczne ujęcie [5–11], uzyskała zasadnicze znaczenie jako narzędzie do linearyzacji układów nieliniowych (rozumianej jako transformacja stanu układu). Wprowadzenie koncepcji odsprzęgania i dekompozycji układów nieliniowych do postaci liniowej, pozwala w wielu przypadkach na przedstawienie układów nieliniowych za pomocą ich liniowych modeli. Modele takie powstają w wyniku działania transformacji linearyzującej – transformującej układ nieliniowy przy użyciu zmiany współrzędnych w przestrzeni stanu. Zmiana taka polega na zamianie oryginalnych zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$ na nowe zmienne $\mathbf{z}(t)$ ale przedstawione (opisujące układ) już w nowej przestrzeni stanu [5, 12–14].
Obrazowo działanie takiej transformacji linearyzującej można przedstawić następująco:

(3) $$S(\mathbf{x}): \quad \mathbf{x}(t) \to \mathbf{z}(t)$$

gdzie: $S(\mathbf{x})$ – transformacja linearyzująca, $\mathbf{z}(t)$ nowy wektor stanu.

W wyniku jej działania wektor stanu w nowych współrzędnych przyjmuje postać:

(4) $$\mathbf{z} = S(\mathbf{x})$$

gdzie: $S(\mathbf{x}) = [S_1(\mathbf{x}), S_2(\mathbf{x}), \ldots, S_n(\mathbf{x})]^{\mathrm{T}}$ jest odwzorowaniem określonym na zbiorze otwartym przestrzeni $\mathbf{R}^n$ o wartościach w $\mathbf{R}^n$ i następujących własnościach:

- S jest odwracalne tzn. istnieje odwzorowanie odwrotne S^{-1} (pozwalające na powrót do oryginalnych składowych wektora stanu $\mathbf{x}(t)$) takie że:

(5) $$\mathbf{x} = S^{-1}(\mathbf{z}) \quad \text{dla dowolnego } \mathbf{z} \text{ w } \mathrm{im}S$$

gdzie: $\mathrm{im}S$ jest obrazem przy przekształceniu S

- S oraz S^{-1} są gładkimi odwzorowaniami.

Transformacja tego typu nazywana jest dyfeomorfizmem [6, 7], [15]. Warunki konieczne i wystarczające istnienia transformacji $S(\mathbf{x})$ układu nieliniowego na układ liniowy podaje twierdzenie zamieszczone w dalszej części pracy. Układy, które nie dają się zlinearyzować a jedynie transformują się do układów qusiliniowych mogą być dalej linearyzowane przez zastosowanie sprzężenia zwrotnego. Należy wówczas korzystać z połączenia (kombinacji) linearyzacji poprzez transformację zmiennych stanu i transformacji wymuszenia $\mathbf{u}(t)$ z zastosowaniem sprzężenia zwrotnego [16–18].
W wyniku działania transformacji polegającej na zmianie współrzędnych i wprowadzeniu sprzężenia zwrotnego wektor stanu w nowych współrzędnych można przedstawić następująco:

(6) $$\mathbf{z} = S(\mathbf{x}) \ + \ \text{sprzężenie zwrotne}$$

Podstawowymi przykładami zastosowania tego typu transformacji linearyzujących są układy nieliniowe opisujące stan nieustalony w obwodach elektrycznych zawierających elementy gromadzące energię (np. układy z elementami RLC) bądź uklad generatora nieliniowego opisanego równaniem Van der Polla:

(7) $$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)\cdot x_2$$

w którym parametr μ traktujemy jako wymuszenie, lub równanie Lotka-Volterra:

(8) $$\dot{x}_1 = x_1(\alpha - x_2\beta) \qquad \dot{x}_2 = -x_2(\gamma - x_1\delta)$$

które może przedstawiać model nieliniowego oddziaływania o charakterze antagonistycznym lub dynamikę oscylacji stężeń substancji w hipotetycznej reakcji chemicznej.

W niniejszej pracy rozważane będą układy nieliniowe (modelujące wejście-stan) opisane szczególną postacią układu (1) i dane następującym równaniem:

(9) $$\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x}(t)) + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t))\,\mathbf{u}_i(t)\,, \qquad \mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$$

gdzie: $\mathbf{f}$ oraz $g_1, g_2, \ldots, g_m$ są gładkimi polami wektorowymi określonymi na rozmaitości $M = \mathbf{R}^n$, nazywanej przestrzenią stanu.

Wymienione metody pozwalają na linearyzację (odsprzęganie i dekompozycję) układów nieliniowych (9) do następującej postaci liniowej:

(10) $$\frac{d\,\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\,\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{v}(t)$$

gdzie: $\mathbf{z}(t)$ i $\mathbf{v}(t)$ są nowymi wektorami stanu i wymuszenia, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami odpowiednich wymiarów.

Analizę układu (10) prowadzimy stosując metody znane z teorii układów liniowych, a następnie korzystając z transformacji odwrotnej $S^{-1}(\mathbf{z})$ przenosimy rezultaty na układ nieliniowy (9).

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza porównawcza metod stosowanych do wyznaczania transformacji $S(\mathbf{x})$ pozwalającej na przedstawienie nieliniowego równania stanu w postaci liniowej.

W atrykule podano elementy teorii geometrii różniczkowej [5-6, 8–11] na podstawie których skonstruowano metody transformacji zmiennych stanu $S(\mathbf{x})$, tak aby nieliniowy układ dynamiczny (9) sprowadzić do układu liniowego (10). Do konstrukcji transformacji (4) wykorzystano elementy algebry Liego (własności grupowego działania jakim są nawiasy Liego) [19–21].

Transformacja przestrzeni stanu

W analizie układów nieliniowych na szczególną uwagę zasługuje operacja obejmująca gładkie pola wektorowe $\mathbf{f}$ oraz $\mathbf{g}$ określone na otwartym zbiorze M przestrzeni $\mathbf{R}^n$ [7, 9]. Wynikiem takiej operacji (zdefiniowanej poniżej) jest nowe gładkie pole wektorowe.

Definicja. Niech $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ będą polami wektorowymi określonymi na rozmaitości M zawartej w $\mathbf{R}^n$. Nawiasami Liego pól wektorowych $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ nazywamy pole wektorowe, zdefiniowane zależnością:

(11) $$[\mathbf{f},\mathbf{g}] = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\circ\mathbf{f} - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\circ\mathbf{g} = (\nabla\otimes\mathbf{g})\circ\mathbf{f} - (\nabla\otimes\mathbf{f})\circ\mathbf{g}$$

gdzie: ∇- operator Hamiltona - „nabla”, $\circ$ - iloczyn skalarny, $\nabla\otimes\mathbf{g}$ oraz $\nabla\otimes\mathbf{f}$ są gradientami pól wektorowych $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$.

Nawiasy Liego można zapisać w formie zwartej (używanej w dalszej części artykułu) jako $ad_\mathbf{f}\mathbf{g}$.

(12) $$[\mathbf{f},\mathbf{g}] = ad_\mathbf{f}\,\mathbf{g}$$

Dla tak przyjętego oznaczenia nawiasów, możemy napisać wzory rekurencyjne:

$$ad_\mathbf{f}^0\mathbf{g} = \mathbf{g} \text{ oraz: } ad_\mathbf{f}^i\mathbf{g} = [\,\mathbf{f}\,, ad_\mathbf{f}^{i-1}\mathbf{g}]\,.$$

Warunki konieczne i wystarczające istnienia transformacji układu nieliniowego na układ liniowy podaje poniższe twierdzenie [5, 6]:

Twierdzenie 1. Układ nieliniowy dynamiczny (9) w otoczeniu punktu równowagi $\mathbf{x}_o$ tzn. $\mathbf{f}(\mathbf{x}_o) = 0$, jest transformowalny do układu liniowego:

(13) $$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\,\mathbf{z} + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{b}_i\cdot u_i$$

wtedy i tylko wtedy kiedy spełnione są następujące dwa warunki w otoczeniu V punktu równowagi $\mathbf{x}_o$ ($\forall\ \mathbf{x}\in V$):

(a) $\dim(span\{ad_\mathbf{f}^j\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\}) = n; \quad 1\le i\le m,\ j = 0,\ldots,n-1$

(b) $[ad_\mathbf{f}^k\mathbf{g}_i, ad_\mathbf{f}^l\mathbf{g}_j](\mathbf{x}) = 0; \quad 1\le i,j\le m,\ k,l\ge 0\,;$

Dowód twierdzenia przedstawiony został w pracy [5].

Jeżeli spełnione są warunki (a) i (b), to w otoczeniu V istnieje n gładkich funkcji $S_i(\mathbf{x})$ $(i = 1,\ldots,n)$ takich, że spełniają one równanie:

(14) $$S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} S_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ S_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix}$$

oraz istnieje transformacja $S(\mathbf{x})$ układu (9) do postaci liniowej. W nowym układzie współrzędnych (4) pochodna wektora stanu dana jest równaniem:

(15) $$\frac{d\,\mathbf{z}(t)}{d\,t} = \nabla\otimes S(\mathbf{x})\circ\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{d\,t}$$

po podstawieniu do (15) wyrażenia na pochodną wektora stanu (9) otrzymujemy:

(16) $$\frac{d\,\mathbf{z}(t)}{d\,t} = \nabla\otimes S(\mathbf{x})\circ(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i)$$

Ponieważ odwzorowanie (14) jest dyfeomorfizmem, ma zatem odwrotne gładkie przekształcenie S^{-1}: $S(V)\to V$ takie, że dla dowolnego $\mathbf{z}\in S(V)$:

(17) $$\mathbf{x}(t) = S^{-1}(\mathbf{z}(t))$$

Własność ta umożliwia powrót do oryginalnych współrzędnych stanu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Podstawiając (17) do zależności (16), otrzymujemy transformowaną (poszukiwaną) postać równania nieliniowego (9):

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \nabla \otimes S(S^{-1}(\mathbf{z})) \circ \mathbf{f}(S^{-1}(\mathbf{z})) + + \sum_{i=1}^{m} \nabla \otimes S(S^{-1}(\mathbf{z})) \circ \mathbf{g}_i(S^{-1}(\mathbf{z}))u_i \tag{18}$$

Równanie (18) możemy zapisać korzystając z transformacji stycznościowej $S_*(\mathbf{x})$ indukowanej przez transformację $S(\mathbf{x})$ oraz (4) w postaci:

$$\frac{d\,\mathbf{z}(t)}{d\,t} = (S_* \circ \mathbf{f})(z) + \sum_{i=1}^{m}(S_* \circ \mathbf{g}_i)(z)\,u_i \tag{19}$$

gdzie:

$$S_*(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial S_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial S_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial S_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{19a}$$

Równanie (19) jest postaci (9) (ale teraz opisane w nowych współrzędnych $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ze stanem początkowym: $\mathbf{z}(0) = S(\mathbf{x}_o)$). W celu wyznaczenia poszukiwanej transformacji $S(\mathbf{x})$ (14) zostaną zaprezentowane dwie metody [5, 15, 22–24] pozwalające na wyznaczenie jej współrzędnych $S_i(\mathbf{x})$; $1 \le i \le n$:

- metoda, *nazywana metodą rektyfikacji lokalnego układu współrzędnych* (U, z_1, ..., z_n);
- oraz metoda, za pomocą której składowe transformacji wyznaczymy rozwiązując układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Metoda rektyfikacji lokalnego układu współrzędnych

Metoda polega na wyznaczeniu zupełnych form różniczkowych pierwszego rzędu dS_i: $1 \le i \le n$ spełniających następujące równanie macierzowe:

$$d\,\mathbf{S} \circ \mathbf{D}_{(-\mathbf{f})} = \mathbf{1} \tag{20}$$

gdzie: $\mathbf{1}$ – macierz jednostkowa; $d\mathbf{S}$ – macierz współczynników formy różniczkowej określona następująco:

$$d\,\mathbf{S} = \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ \vdots \\ dS_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & S_{1n}(\mathbf{x}) \\ S_{21}(\mathbf{x}) & \cdots & S_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{n1}(\mathbf{x}) & \cdots & S_{nn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

$\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})}$ – dystrybucja wyznaczona dla wektorów ($\mathbf{g}$, $-\mathbf{f}$):

$$\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})} = \left[ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\,\mathbf{g},\, ad_{(-\mathbf{f})}^{n-2}\mathbf{g},\, \ldots,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g},\, \ldots,\, \mathbf{g}\right] \tag{22}$$

Współczynniki formy różniczkowej (21) $\left(S_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$ są funkcjami niewiadomymi. I tak, przykładowo:

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_{11}(\mathbf{x})dx_1 + S_{12}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + S_{1n}(\mathbf{x})dx_n \\ dS_2 &= S_{21}(\mathbf{x})dx_1 + S_{22}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + S_{2n}(\mathbf{x})dx_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ dS_n &= S_{n1}(\mathbf{x})dx_1 + S_{n2}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + S_{nn}(\mathbf{x})dx_n \end{aligned}$$

Po podstawieniu (21) i (22) do równania (20) otrzymujemy że:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})}\right)^{-1} \circ \mathbf{1} \tag{23}$$

czyli macierz współczynników formy różniczkowej $S_{ij}(\mathbf{x})$ jest równa macierzy odwrotnej dystrybucji $\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})}$:

$$\left[ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\,\mathbf{g},\, ad_{(-\mathbf{f})}^{n-2}\mathbf{g},\, \ldots,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g},\, \ldots,\, \mathbf{g}\right]^{-1} = S_{ij}(\mathbf{x}) \tag{24}$$

Istnienie macierzy odwrotnej (24) wynika z warunku (a) twierdzenia 1. Ponieważ:

$$\det\left[ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\,\mathbf{g},\, \ldots,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g},\, \ldots,\, \mathbf{g}\right] \ne 0 \tag{25}$$

rząd macierzy $\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})}$ jest równy n.

Obliczając współczynniki formy różniczkowej (21) możliwe jest wyznaczenie składowych poszukiwanej transformacji $S(\mathbf{x})$. W tym celu należy kolejno całkować dS_i; $1 \le i \le \mathrm{n}$ zgodnie z zależnością:

$$S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int dS_i \tag{26}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{x}) &= \int S_{11}(\mathbf{x})dx_1 + \int S_{12}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + \int S_{1n}(\mathbf{x})dx_n \\ S_2(\mathbf{x}) &= \int S_{21}(\mathbf{x})dx_1 + \int S_{22}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + \int S_{2n}(\mathbf{x})dx_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ S_n(\mathbf{x}) &= \int S_{n1}(\mathbf{x})dx_1 + \int S_{n2}(\mathbf{x})dx_2 + \cdots + \int S_{nn}(\mathbf{x})dx_n \end{aligned}$$

Metoda równań różniczkowych pierwszego rzędu

W metodzie tej składowe transformacji $S_i(\mathbf{x})$; $1 \le i \le n$ ($S: \mathbf{x} \to \mathbf{z}$) wyznaczymy rozwiązując następujący układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} &\left\langle dS_i\,,\, D_{n-i}\right\rangle = 0 \\ &\left\langle dS_i\,,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\mathbf{g}\right\rangle = c_i \ne 0, \quad 1 \le i \le n \end{aligned} \tag{27}$$

lub rozpisując:

$$\begin{aligned} &\left\langle dS_1\,,\, D_{n-1}\right\rangle = 0 \\ &\left\langle dS_1\,,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\mathbf{g}\right\rangle = c_1 \\ &\left\langle dS_2\,,\, D_{n-2}\right\rangle = 0 \\ &\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &\left\langle dS_n\,,\, D_0\right\rangle = 0 \\ &\left\langle dS_n\,,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\mathbf{g}\right\rangle = c_n \end{aligned} \tag{28}$$

w którym kolejne dystrybucje D_{n-1}; $1 \le i \le n$ mają postać:

$$\begin{aligned} D_0 &= span\{\mathbf{g}\} \\ D_1 &= span\left\{\mathbf{g}\,,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g}\right\} \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ D_{n-1} &= span\left\{\mathbf{g}\,,\, ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g},\, \ldots,ad_{(-\mathbf{f})}^{n-1}\mathbf{g}\right\} \end{aligned}$$

W równaniach (27), dS_i; $1 \le i \le n$ są formami różniczkowymi pierwszego rzędu reprezentowanymi przez gradienty funkcji $S_i(\mathbf{x})$.

Prezentowane metody zastosowano do linearyzacji układu równań nieliniowych opisujących nieliniowy układ oscylacyjny drugiego rzędu.

Przykład

Rozpatrzono dynamiczny układ nieliniowego generatora określonego na $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ i opisanego następującym układem równań:

$$\text{(29)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \ln x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \ln x_1 + x_2\, u \end{cases}$$

Niech $x_0 = [1, 1]^{\mathrm{T}}$ oraz wymuszenie $u = \mathbf{1}(t)$.

Wektory $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{R}^2$, $n = 2$, $m = 1$) układu równań (26) mają postać:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 \ln x_2 \\ -x_2 \ln x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Punktem wyjścia linearyzacji jest, stosując twierdzenie 1, sprawdzenie warunków istnienia transformacji $S(\mathbf{x})$ dla układu równań (29). W tym celu należy wyznaczyć dla funkcji wektorowych $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ zbiór wektorów (będących nawiasami Liego) określony następująco:

$$\text{(30)} \qquad \{ad_{\mathbf{f}}^{j}\mathbf{g}_i(\mathbf{x}),\ \ 1 \le i \le m,\ \ j = 0, \dots, n-1\}$$

W rozpatrywanym przypadku wektory te tworzą następującą dystrybucję:

$$\text{(31)} \qquad \Delta = \left\{\mathbf{g},\ ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g}\right\}$$

Wyznaczając kolejne nawiasy Liego występujące w (31) otrzymujemy:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g} = [\mathbf{f},\ \mathbf{g}] = [\mathbf{f},\ ad_{\mathbf{f}}^{0}] = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \circ \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \circ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jak wynika z obliczeń:

$$\text{(32)} \qquad span\left(\mathbf{g},\ ad_{\mathbf{f}}^{1}\right) = span\left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

Zatem dystrybucja Δ reprezentowana przez macierz $\mathbf{F}$ ma postać:

$$\text{(33)} \qquad \Delta = span\left(\mathbf{g},\ ad_{\mathbf{f}}^{1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -x_1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

Rząd macierzy $\mathbf{F}$ jest równy 2.

Ponieważ $\det \mathbf{F} = x_1 \cdot x_2 \ne 0$, dla $x_1, x_2 \ne 0$ spełniony jest warunek (a). W zbiorze tym dystrybucja Δ jest nieosobliwa.

Warunek (b) w rozpatrywanym przypadku, dla: $m = 1,\ n = 2,\ k, l = 0,\ \ n-1 = 1$ ma postać:

$$[\mathbf{g},\ ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g}] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = -\mathbf{g} \circ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $[ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g},\ ad_{\mathbf{f}}^{1}\mathbf{g}] = 0$ spełniony jest również warunek (b) a dystrybucja Δ jest dystrybucją inwolutywną (całkowalną).

Zatem układ (29) spełnia warunki (a) oraz (b). Oznacza to, że istnieje $n = 2$ gładkich funkcji $S_1(\mathbf{x}), S_2(\mathbf{x})$, takich, że spełniają one równanie (14) czyli istnieje transformacja $S(\mathbf{x})$ układu (29) do układu liniowego. Dla rozpatrywanego przypadku ma ona następującą ogólną postać:

$$\text{(34)} \qquad S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} S_1(x_1, x_2) \\ S_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Do wyznaczenia składowych transformacji (34) skorzystano z przedstawionych metod.

W metodzie rektyfikacji lokalnego układu współrzędnych należy wyznaczyć zupełne formy różniczkowe pierwszego rzędu dS_i: $1 \le i \le n$ spełniające równanie macierzowe (20). Przyjmuje ono w analizowanym przypadku postać:

$$\text{(35)} \qquad \begin{bmatrix} S_{11}(\mathbf{x}) & S_{12}(\mathbf{x}) \\ S_{21}(\mathbf{x}) & S_{22}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} D_{(-\mathbf{f})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W równaniu (35) dystrybucja $\mathbf{D}_{(-\mathbf{f})}$ ma następującą reprezentację macierzową:

$$\text{(36)} \qquad D_{(-\mathbf{f})} = \left[ad_{(-\mathbf{f})}^{1}\mathbf{g},\ \mathbf{g}\right] = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna dystrybucji występującej w równaniu (23) jest równa:

$$\text{(35)} \qquad D_{(-\mathbf{f})}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\det D_{(-\mathbf{f})}(\mathbf{x})} D_d(\mathbf{x})$$

gdzie: $D_d(\mathbf{x})$ jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy $D_{(-\mathbf{f})}(\mathbf{x})$. W tym przypadku:

$$\text{(36)} \qquad D_d(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

stąd:

$$S(\mathbf{x}) = D_{(-\mathbf{f})}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1} =$$

$$\text{(37)} \qquad = \frac{1}{x_1 x_2}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{bmatrix}$$

Formy różniczkowe wyznaczany ze wzoru:

$$\text{(38)} \qquad dS_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2} S_{ij}(\mathbf{x}) dx_j; \quad i = 1,\ 2$$

Formy te są postaci:

$$\text{(39)} \qquad dS_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1} dx_1, \qquad dS_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_2} dx_2$$

Całkując formy (39), otrzymujemy składowe poszukiwanej transformacji:

$$\text{(40)} \qquad S_1(x_1, x_2) = \int \frac{1}{x_1} dx = \ln x_1, \qquad S_2(x_1, x_2) = \int \frac{1}{x_2} dx_2 = \ln x_2$$

Druga metoda wyznaczania transformacji $S(\mathbf{x})$ polega na rozwiązaniu następującego układu równań różniczkowych pierwszego rzędu, które w rozpatrywanych przypadku mają postać:

(41a) $$\langle dS_1, \mathbf{g}\rangle = 0$$

(41b) $$\langle dS_1, \mathbf{f}\rangle = S_2(x_1, x_2)$$

gdzie: $dS_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \nabla \otimes S_1$

Dla równania (41a) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Wynika stąd, że: $x_2 \dfrac{\partial S_1}{\partial x_2} = 0$

W efekcie otrzymujemy pierwszą składową poszukiwanej transformacji, która jest równa:

(42) $$S_1(x_1, x_2) = \ln x_1$$

Następnie wstawiając $S_1(x_1, x_2)$ do równania (41b) otrzymujemy składową $S_2(x_1, x_2)$:

(43) $$S_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \ln x_2 \\ -x_2 \ln x_1 \end{bmatrix} = \ln x_2$$

Jak można zauważyć składowe poszukiwanej transformacji wyznaczone obiema metodami są tej samej postaci. Zatem można zapisać, że:

(44) $$S(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} S_1(x_1, x_2) \\ S_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia zlinearyzowanego równania stanu należy wyznaczyć transformację stycznościową $S_*(\mathbf{x})$ (19a).. Ma ona postać następującą:

(45) $$S_*(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial S_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial S_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} \end{bmatrix}$$

Transformacja wektorów $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ daje następujące przedstawienie:

$$(S_* \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \ln x_2 \\ -x_2 \ln x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln x_2 \\ -\ln x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2(t) \\ -z_1(t) \end{bmatrix}$$

$$(S_* \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd układ nieliniowy (29) w nowych współrzędnych (z_1, z_2) przyjmuje postać liniową opisaną następującym układem równań:

(46) $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

gdzie: $[z_1(0), z_2(0)] = [S_1(1,1), S_2(1,1)] = (0, 0)$.

Powyższa transformacja jest zdefiniowana globalnie na $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. W efekcie zastosowanej linearyzacji otrzymujemy liniowy model układu (29) we współrzędnych $\mathbf{z}(t)$, zdekomponowany i odsprzęgnięty. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie równania (46) jest następujące:

(47) $$\begin{cases} z_1(t) = -\cos t + 1 \\ z_2(t) = \sin t \end{cases}$$

Korzystając następnie z zależności (17) wyznaczamy przebiegi czasowe rozwiązania układu nieliniowego (29) mają postać:

(48) $$\begin{cases} x_1(t) = \exp[1 - \cos t] \\ x_2(t) = \exp[\sin t] \end{cases} \qquad (7)$$

Podsumowanie

Analizując otrzymane wyniki można stwierdzić, że metoda rektyfikacji lokalnego układu współrzędnych jest metodą dającą identyczne rezultaty jak metoda oparta o równania różniczkowe pierwszego rzędu. Obie metody wymagają podobnego nakładu obliczeń dla układów niskich rzędów. W przypadku układów rzędu $n = 3$ rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu staje się trudniejszym zadaniem niż całkowanie form różniczkowych pierwszego rzędu.

Układ równań (27) dla $n = 3$ przyjmuje postać:

(49) $$\left.\begin{aligned} &\langle dS_1, span\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}\rangle = 0 \\ &\langle dS_1, ad^2_{(-\mathbf{f})}\mathbf{g}\rangle = C_1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \ \ i = 1$$
$$\left.\begin{aligned} &\langle dS_2, span\{\mathbf{g}, ad^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}\rangle = 0 \\ &\langle dS_1, ad_{(-\mathbf{f})}\mathbf{g}\rangle = C_2 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \ \ i = 2$$
$$\left.\begin{aligned} &\langle dS_3, span\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, ad^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}\rangle = 0 \\ &\langle dS_3, \mathbf{g}\rangle = C_3 \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \ \ i = 3$$

Zatem rozwiązując powyższy układ otrzymujemy układ dziewięciu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o niewiadomych trzech funkcjach skalarnych $S_1(x_1, x_2, x_3)$; $S_2(x_1, x_2, x_3)$; $S_3(x_1, x_2, x_3)$.
Rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu jest trudniejszym zadaniem niż scałkowanie form różniczkowych pierwszego rzędu.

Uzyskane w wyniku stosowania transformacji linearyzującej proste modele liniowe opisane równaniem (10) okazują się bardzo przydatne w rozwiązywaniu różnych praktycznych problemów techniki, głównie z uwagi poznaną i dobrze opanowaną teorię układów liniowych.

Prezentowane zabiegi transformacyjne nie naruszają związków konstytutywnych (charakterystyk elementów nieliniowych) a jedynie są transformacjami, które czynią to co jest nieliniowe w jednym układzie współrzędnych, liniowym w innym – poszukiwanym układzie współrzędnych.

LITERATURA

[1] Osowski S., Modelowanie i symulacja układów i procesów dynamicznych wydawnictwo. *OWPW*, (2007).
[2] Pasko M., Lewicki A., Białoń T., Badania obserwatorów proporcjonalnych w multiskalarnym układzie sterowania silnika indukcyjnego, *Przegląd Elektrotechniczny*, (2008), nr.9, 45-50.
[3] Kaniewski J., Fedyczak Z., Modeling and analysis of dynamic properties of the hybrid transformer with MRC, *Przegląd Elektrotechniczny*, 87 (2011), nr.1, 45-50.
[4] Tokarzewski J., A general solution to the output-zeroing problem for MIMO LTI systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* vol. 19 (2002) no 2, 161-171.
[5] Nijmeijer H., van der Schaft A.J., Nonlinear Dynamical Control Systems, *Springer-Verlag, New York* (1991).
[6] Isidori A., Nonlinear Control Systems: An Introduction, *Springer, Berlin* (1989}.
[7] Isidori A., Nonlinear Control Systems. *Springer, Berlin* (1995).
[8] Tokarzewski J., Sokalski L., Zeros in linear systems - a geometric approach, *SIAM Conference on Control and its Applications, session CP14, San Diego* (2001).
[9] Oprea J., Geometria różniczkowa i jej zastosowania, *PWN*, (2002).
[10] Gancarzewicz J., Opozda B., Wstęp do geometrii różniczkowej, *Wyd. UJ, Kraków*, (2003).
[11] Fichtenholz G. M., Rachunek różniczkowy i całkowy, *PWN*, (2004), tom 1.
[12] Fujimoto K., Sugie T. "Freedom in Coordinate Transformation for Exact Linearization and Its Application to Transient Behavior Improvement." *Automatica*, 37 (2001) 137-144,.
[13] Zhang J. J., Luo Y., Xi S., Chen H., Ran L.-X., Wu B.-I., and Kong J. A., Directive Emission Obtained by Coordinate Transformation, *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 81, (2008) 437-446.
[14] Ye D., Xi S., Chen H., Huangfu J., and Ran L.-X. Achieving Large Effective Aperture Antenna with Small Volume Based on Coordinate Transformation, *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 111, {2011} 407-418.
[15] Jordan A., Nowacki J.P., Global linearization of non-linear state equations, *International Journal Applied Electromagnetics and Mechanics*, 19 (2004), 637–642
[16] Devanathan R.; Linearization Condition through State Feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, n. 8, (2001} 1257-1260.
[17] Boukas T. K., Habetler T. G., High-Performance Induction Motor Speed Control Using Exact Feedback Linearization with State and State Derivative Feedback, *IEEE Transactions on Power Electronics*, 19, {2004} n. 4, 1022-1028.
[18] Deutscher J., Schmid C., A state space embedding approach to approximate feedback linearization of single input nonlinear control systems, *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 16, (2006) 421–440.
[19] Bourbaki N., Lie groups and Lie algebras*., Springer, Berlin*, (1998), *Chapters 1*–3, Lie groups and Lie algebras, *Springer, Berlin*, (2002), Chapters 4–6
[20] Bump D., Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics, *Springer, New York*, vol. 225 (2004).
[21] Serre J. P., Complex semisimple Lie algebras, *Springer-Verlag, Berlin*, (2001).
[22] Zawadzki A., Transformacja nieliniowych układów metodą geometrii różniczkowej. Rozprawa doktorska, *Wyd. Politechniki Warszawskiej* (2001).
[23] Krzemiński S., Zawadzki A., Linearyzacja układu równań Lagrange'a metodą geometryczną. *SPETO'99, , Gliwice-Ustroń* (1999) 265-268.
[24] Krzemiński S., Zawadzki A.,Geometric approach to modelling of nonlinear electrical networks. *SPETO'2002. Gliwice*, (2002), 191-194.

***Autor**: dr inż. Andrzej Zawadzki, Politechnika Świętokrzyska, Katedra Urządzeń Elektrycznych i Techniki Świetlnej, Aleja. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce, E-mail: a.zawadzki@tu.kielce.pl*